

(平 22 前)

数 学

(理 科 系)

(1～5 ページ)

・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a を実数とする. 関数 $f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ が極値をもたないように, a の値の範囲を定めよ. (配点 30 点)

2. p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする. 以下の間に答えよ. ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい. (配点 30 点)

(1) $a + b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(2) $a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(3) $a^2 + b^2$ と $a^3 + b^3$ がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

3. $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $g(x) = \frac{2\log x}{x^2}$ ($x > 0$) とする. 以下の間に答えよ. ただし, 自然対数の底 e について, $e = 2.718\cdots$ であること, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを証明なしで用いてよい.
(配点 30 点)

- (1) 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ.
- (2) 区間 $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の増減, 極値を調べ, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ. グラフの変曲点は求めなくてよい.
- (3) 区間 $1 \leq x \leq e$ において, 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$, および直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

4. N を自然数とする. 赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする. 2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する. 赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし, ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(配点 30 点)

- (1) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して, $X = n$ となる確率 p_n を求めよ.
- (2) X の期待値を求めよ.
- (3) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して, $Y = n$ となる確率 q_n を求めよ.

5. 座標平面において, 点 $P_n (a_n, b_n)$ ($n \geq 1$) を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

で定める. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) a_n, b_n を n と θ を用いて表せ.

(2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき, 自然数 n に対して, 線分 $P_n P_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ.

(3) (2) で求めた l_n に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ.