（平 28 前）　　　　　　数　　　学

（理　科　系）

（1 ～ 5 ページ）

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

1. 四面体 OABC において, P を辺 OA の中点, Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点, R を辺 BC の中点とする. P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

(2) 比 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AS}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right|$ を求めよ.

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき, $\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|$ を求めよ.

2. a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) $0 < a \leqq \dfrac{3}{2}$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を a を用いて表せ．また，その条件をみたす点 (a, b) の領域を ab 平面上に図示せよ．

3. a を正の定数とし, 2 曲線 $C_1 : y = \log x$, $C_2 : y = ax^2$ が点 P で接しているとする. 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) P の座標と a の値を求めよ.

(2) 2 曲線 C_1, C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

4. 約数, 公約数, 最大公約数を次のように定める.

- 2 つの整数 a, b に対して, $a = bk$ をみたす整数 k が存在するとき, b は a の約数であるという.
- 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という.
- 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という.

以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a = pb + c$ をみたしているとする.

(i) $a = 18$, $b = 30$, $c = -42$, $p = 2$ のとき, a と b の公約数の集合 S, および b と c の公約数の集合 T を求めよ.

(ii) a と b の最大公約数を M, bとcの最大公約数をNとする. MとNは等しいことを示せ. ただし, a, b, c, pは0でない任意の整数とする.

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, \cdots), \quad a_1 = 3, \ a_2 = 4$$

で定める.

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ.

(ii) a_{n+1} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ.

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ.

5. 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする. 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 (x, y) で表したとき, $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点, および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi} \frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ.

(4) 曲線 C の長さを求めよ.