

# 数 学

**1**  $f(x) = x^2 + x + 1$  とする。放物線  $y = f(x)$  を  $C$  とし、直線  $y = 3x$  を  $l$  とする。自然数  $n = 1, 2, \dots$  について、実数  $x_n$  と直線  $l_n$  を次のように定める。

- ①  $x_1 = 2$  とし、点  $(x_1, f(x_1)) = (2, 7)$  における  $C$  の接線を  $l_1$  とする。
- ② 自然数  $n$  について、実数  $x_n$  と直線  $l_n$  が定まったとき、 $l$  と  $l_n$  の交点の  $x$  座標を  $x_{n+1}$  とし、点  $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$  における  $C$  の接線を  $l_{n+1}$  とする。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $l_n$  の方程式を  $x_n$  を用いて表せ。
- (2) 数列  $\{x_n\}$  の漸化式を求めよ。
- (3)  $x_n$  を  $n$  の式で表せ。

# 数 学

2 複素数平面において、 $0$  と  $\cos \theta + i \sin \theta$  を通る直線と 3 点  $1, 3, 2 + ih$  を頂点とする三角形の辺が 2 つの共有点  $z_1, z_2$  ( $|z_1| < |z_2|$ ) をもつとする。ただし、 $0 < h, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。

次の問いに答えよ。

- (1)  $z_1, z_2$  を  $h, \theta$  を用いて表せ。
- (2)  $\frac{|z_2|}{|z_1|} = k$  とおくとき、 $\frac{\tan \theta}{h}$  を  $k$  を用いて表せ。

# 数 学

**3** 次の問いに答えよ。

- (1) 平面上の $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$  (ベクトルの内積)が成立するとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) 平面上の四角形 $ABCD$ の内角はどれも $180^\circ$ より小とする。 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$  (ベクトルの内積)が成立するとき、四角形 $ABCD$ は長方形であることを示せ。

# 数 学

**4** 長軸が  $x$  軸上にある楕円  $C$  が 2 点  $P_1 \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right)$ ,  $P_2 \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$  を通るとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $P_1$  における  $C$  の接線の方程式が  $4x + 12y = 5$  であるとき,  $C$  の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた  $C$  の極方程式を求めよ。

# 数 学

- 5 放物線  $y = (x + 1)^2$  上に定点  $A(-3, 4)$ ,  $B(0, 1)$  をとる。点  $P$  が点  $B$  を出発して、この放物線上を  $x \geq 0$  の方向に動くとき、出発してから  $t$  秒後の点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする。また、線分  $AP$  とこの放物線で囲まれた部分の面積  $S$  について、 $\frac{dS}{dt}$  は一定値  $1$  をとるとする。次の問いに答えよ。
- (1)  $S$  を  $x$  を用いて表せ。
  - (2)  $\frac{dx}{dt}$  を  $x$  を用いて表せ。
  - (3) 点  $P(x, y)$  の動く速さを  $x$  を用いて表せ。
  - (4) 点  $P$  の動く速さが最大となるときの点  $P$  の座標を求めよ。