

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) A^2 , A^4 を求めよ。

(2) $A^3 + 2A^2 + 4A + 8E$ を求めよ。

(3) $E + \frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}$ を求めよ。

2

整式 $f(x)$ は関係式 $\int_0^x f(x)dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \int_x^0 f(x)dx$ を満たしている。また $r \geq 0$ に対し、 $|x| \leq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求め、 $y = |f(x)|$ のグラフをかけ。

(2) $F(r)$ を求めよ。

(3) $\int_0^2 F(r) dr$ を求めよ。

3 n を自然数とする。数 w は、

$$w = 2^i + 2^j + 2^k \quad (i, j, k \text{ は自然数で } 1 \leq i \leq j \leq k \leq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $n = 7$ とする。 w の値が 2^8 , $2^6 + 2^4$ となるそれぞれの場合について、 (i, j, k) をすべて求めよ。
- (2) n を一般の自然数とする。 $2^r + 2^s$ (r, s は自然数で $r < s$) の形で表される w の値は全部で何個あるか。
- (3) 一般の自然数 n に対し、 w の値は全部で何個あるか。

4 2次関数 $y = f(x)$ は2点 $(0, 0)$, $(p, 0)$ を通り ($p > 0$), 曲線 $y = e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y = e^x$ と x 軸, および2直線 $x = 0$, $x = p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1 , F_2 を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とする。このとき V_1 , V_2 の値を, p を用いて表せ。

(3) $\lim_{p \rightarrow +0} \frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。