1 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y = a\sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を C とする。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 A $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき，接点を P とする。

(1) l の方程式および P の座標を求めよ。

(2) 直線 $x = -1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を求めよ。

(3) 直線 l と直線 $x = -1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1 = 2S_2$ が成り立つことを示せ。

2 $x>0$ に対して，2次の行列 $A(x)$，B を

$$A(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{1+3x^2} & 3x \\ x & \sqrt{1+3x^2}\end{pmatrix},\quad B=A(1)=\begin{pmatrix}2 & 3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

と定める。

(1) $x>1$ のとき，$0<y<x$ であって $A(x)=A(y)B$ を満たす実数 y が存在することを示せ。

(2) 行列 $A(x)$ の各成分が自然数であるとする。このとき，$A(x)=B^n$ となる自然数 n が存在することを示せ。

3 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $r>1$ かつ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において，z，$\dfrac{1}{z}$，$\bar{z}$，$\dfrac{1}{\bar{z}}$ を表す点をそれぞれ P，Q，R，S とする。ただし，$\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1) 点 P，Q，R，S は相異なる 4 点であることを示せ。

(2) 直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき，r を θ の関数として表し，θ の動きうる区間 $(\alpha,\ \beta)$ を求めよ。

(3) (2)において，原点と点 $\cos\beta+i\sin\beta$ を通る直線を l とし，点 P と l の距離を d とする。$\theta\to\beta$ のとき，d は 0 に収束することを示せ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式

$$x(\log x - \log y) \geqq x - y$$

が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1, …, x_n が $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たしているとき，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log \frac{1}{n}$$

が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。