

1 関数 $f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくとき, $f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(\theta) = 0$ を満たす θ をすべて求めよ。
- (3) $f(\theta) = a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 36$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 17 \cdot 2^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に
より定められているとする。

- (1) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくととき b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き, $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $a_n > a_{n+1}$ となるような n の値の範囲および a_n が最小となるような n の値を求めよ。
- (3) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくととき S_n が最小となるような n の値をすべて求めよ。

3

以下の問いに答えよ。

(1) 次の (i), (ii) のグラフの概形を別々にかけ。

(i) $y = 1 - |x|$

(ii) $y = \frac{1}{1 + |x|}$

(2) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において不等式

$$(ax + b)(1 - x^2) \leq 1 - |x|$$

が成り立つとき、定数 a, b の満たす条件を求めよ。(3) a, b が (2) で求めた条件を満たすとき、区間 $-1 \leq x \leq 1$ で $y = 1 - |x|$ と $y = (ax + b)(1 - x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。

4

関数 $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} - 2$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) $f(0)$, $f'(0)$ および $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ。

(2) O を原点, P を曲線 $y = f(x)$ 上の点, Q を x 軸上の点とする。 P, Q の x 座標がともに正で, $OP = OQ$ の関係を保ちながら P, Q が動くとき, 直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする。

(i) P の x 座標を t , R の y 座標を $g(t)$ とおくと

$$g(t) = \frac{t^2 + \{f(t)\}^2 + t\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii) P が O に限りなく近づくとき, R が近づく点を求めよ。