平成17年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数　　学

理学部
医学部
　医学科
薬学部
工学部

(注　意)

1　問題紙は指示のあるまで開かないこと。

2　問題紙は本文2ページであり，答案用紙は4枚である。

3　答えはすべて答案用紙の指定欄に記入し，**網かけの部分や裏面には記入しないこと。**

4　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1　3点A(6, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 6)の定める平面をαとする。原点Oを通り平面αに直交する直線とαとの交点をHとする。また，線分HO上の点で，Hからの距離がtとなる点をP_tとする。ただし，P_tの動く範囲から両端点H, Oはのぞくとする。次の問いに答えよ。

(1)　点Hの座標と，tの動く範囲を求めよ。

(2)　平面α上にあり，P_tからの距離がOHとなる点が作る円をS_tとする。S_tとその内部を底面とし，P_tを頂点とする円錐(えんすい)の体積を$f(t)$とする。このとき$f(t)$を求めよ。

(3)　(2)の$f(t)$の最大値を求めよ。

2　定数aは$0 < a < 1$をみたすとする。行列$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$について次の問いに答えよ。

(1)　Pの2乗は$P^2 = \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$という形で表されることを示せ。

(2)　nが自然数のとき，Pのn乗は

$$P^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$$

という形で表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　(2)のp_nについて，数列$\{p_n\}$の一般項と$\lim_{n \to \infty} p_n$を求めよ。

3 関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) = \sin x$ とおき，$x < 0$ または $\pi < x$ のとき $f(x) = 0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2つの定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ の値を求めよ。

(3) $a > 0$ について

$$T(a) = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{2af(x) + \frac{1}{a} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$$

とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

4 1個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも1回は1の目が出る確率を a_n とする。$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて1の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) $M_n = \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k b_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3) (2)の M_n について，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} M_n$ を求めよ。ただし，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n r^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。