1 定数 a，b と関数 $f(x)$ が

$$\int_2^x f(t)\,dt=(x-a)(x^2+x+b)$$

をみたすとする。次の問いに答えなさい。

(1) $y=f(x)$ のグラフが点$(-1,\ 4)$ を通るとき，方程式 $f(x)=0$ の解を求めなさい。

(2) 定数 a が負のとき，$y=f(x)$ のグラフは，a の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めなさい。

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = x(x - a)$ について，次の問いに答えなさい。ただし，$a > 0$ とする。

(1) 放物線 C と直線 $y = -x + a$ とで囲まれる図形の面積を求めなさい。

(2) $a = 2$ のとき，直線 $y = kx$ によって (1) の図形の面積が二等分されるように k の値を定めなさい。

(3) 放物線 C と点$(0,\ 1)$を通る直線とで囲まれる図形の面積が最小となるとき，直線の方程式およびその図形の面積を求めなさい。

3 関数 $f(x)=x^x$ $(x>0)$ について，次の問いに答えなさい。

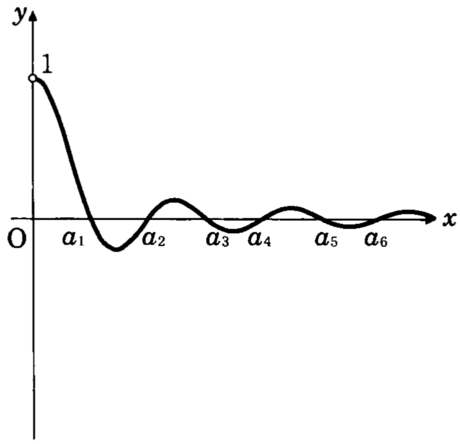
(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線で原点を通るものは1本しかないことを示し，その接線の方程式を求めなさい。

4 右の図は，関数

$$y=\frac{\sin x}{x} \qquad (x>0)$$

のグラフの概形である。このグラフと x 軸との交点の x 座標を左から順に，a_1，a_2，a_3，……，a_n，……とおく。$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ において，このグラフを x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_n とすると，$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ は収束する。



次の問いに答えなさい。

(1) a_n の値を求め，V_n を $\dfrac{\sin 2x}{x}$ の定積分で表しなさい。

(2) $V_n \leqq \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ となることを示しなさい。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leqq 1$ となることを示しなさい。

5 整式 $f(x)=x^3+ax^2+3bx+3$ において，定数 a，b は整数とする。この整式が整数 n を用いて $f(x)=(x-n)(x^2+px+q)$ と因数分解されるとき，次の問いに答えなさい。

(1) p，q が整数であることを示し，整数 n の値を求めなさい。

(2) 2次方程式 $x^2+px+q=0$ が虚数解をもつように，a，b，n，p，q の値を定めなさい。

6 平面上に $\triangle ABC$ と点 P があり,

$$\alpha\,\overrightarrow{PA} + \beta\,\overrightarrow{PB} + \gamma\,\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1$$

の関係が成り立っている。次の問いに答えなさい。

(1) 点 P は $\triangle ABC$ の周または内部にあることを示しなさい。

(2) $\triangle ABC$ が辺の長さ 1 の正三角形であるとき，その内心を I として，
$|\overrightarrow{IP}|^2$ を β, γ で表しなさい。

(3) (2) において，点 P が点 I を中心とする $\triangle ABC$ の内接円上にあるための必要十分条件は

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{4}$$

であることを示しなさい。