平成 19 年度 入学試験問題

数　　学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. **各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。**
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	1	3	4	6
経済学部	4	7		
医学部	2	4	5	
歯学部	2	4	5	
薬学部	1	3	4	6
工学部	1	3	4	6
環境科学部	4	7		
水産学部	4	7		

1 関数 $f(x)=\int_a^x (t^2-t)\,dt$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は実数の定数とする。

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の極大値および極小値を，a を用いて表せ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる3点で交わるための a の範囲を求めよ。

1 （下書き用紙）

2 m は正の定数とする。関数

$$f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + m^2x$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ は 0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の 0 以外の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を m を用いて表せ。また α，β がともに正であることを示せ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形について，$y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積と $y \leqq 0$ の範囲にある部分の面積が等しいものとする。そのとき，m，α，β の値を求めよ。

$\boxed{2}$ （下書き用紙）

3 次の連立不等式が表す領域を D とする。

$$\begin{cases} y + 1 \leqq 2x \leqq 4 - y \\ 2y \geqq 1 \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D と放物線 $y = px^2$ が共有点を持つような定数 p の範囲を求めよ。

3 （下書き用紙）

4 △ABCにおいて辺BC, CA, ABの中点を，それぞれP, Q, Rとする。さらに，線分APを 2：1 に内分する点をOとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) 辺AB, BC, CAを 2：1 に内分する点を，それぞれA_1, B_1, C_1とする。また，線分A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1を 2：1 に内分する点を，それぞれA_2, B_2, C_2とする。$\overrightarrow{OA_2}$を$\vec{a}$を用いて表せ。

(3) 線分B_2C_2と線分QRが平行であることを示せ。

(4) △PQRの面積をSとするとき，$\triangle A_2B_2C_2$の面積をSを用いて表せ。

4 （下書き用紙）

5 nは2以上の自然数とする。関数

$$f_n(x) = x^n \log x \quad (x > 0)$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$\lim_{x \to +0} x^n \log x = 0$ であることを用いてよい。

(1) 関数 $y = f_n(x)$ の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

(2) 関数 $y = f_n(x)$ の最小値を L_n とするとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n}$ の和を求めよ。

(3) 曲線 $y = f_n(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ。

(4) k を定数とするとき，x に関する方程式

$$x^n \log x = x + k \quad (x > 0)$$

の解の個数を調べよ。

$\boxed{5}$ （下書き用紙）

6 曲線 $C : y = \log x$ の点 $(1, 0)$ における接線を l_1 とする。曲線 C と直線 l_1 および直線 $l_2 : x = e$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V を求めたい。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l_1 の方程式を求めよ。

(2) x 軸と直線 l_1，l_2 で囲まれる部分を，x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(3) 2次の多項式 $P(x) = ax^2 + bx + c$ が，次の条件

$$\{xP(\log x)\}' = (\log x)^2 \quad (x > 0)$$

を満たすような，定数 a，b，c の値を求めよ。

(4) 体積 V を求めよ。

$\boxed{6}$ （下書き用紙）

7 関数 $f(x)=\int_0^x 6\,(t-\alpha)(t-\beta)\,dt$ を考える。ただし，$0<\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha)>0$ であることを示せ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフ上で $f(x)$ の極大値を表す点をP，極小値を表す点をQとする。直線PQの傾き h を求めよ。

(3) 線分PQを $m:n$ に内分する点の x 座標を r とし，曲線 $y=f(x)$ 上の $x=r$ に対応する点における接線の傾きを k とする。$\dfrac{m}{m+n}=s$ とおくとき，k を α，β，s を用いて表せ。さらに，$\dfrac{k}{h}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{7}$ （下書き用紙）