平成21年度　入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. **各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。**
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	1	3	4	5
経済学部	1	2		
医学部	4	6	7	8
歯学部	4	6	7	8
薬学部	1	3	4	5
工学部	1	3	4	5
環境科学部	1	2		
水産学部	1	2		

1 p を $p > 1$ を満たす定数とし，

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = p \\ a_{n+2} = pa_n + (1-p)a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) a_3，a_4 を求め，$a_4 > a_2 > 1 > a_3$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n \geqq 1)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。
また，b_n を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) 不等式

$$1 > a_{2m+1} > a_{2m+3} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(4) $p = \dfrac{3}{2}$ のとき，$0 > a_n$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

1 （下書き用紙）

2 a を $a > 2$ を満たす定数とする。関数

$$f(x) = 2a^{3x} - 9a^{2x+1} + 12a^{x+2} \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $a^x = X$ とおいたときの $f(x)$ を $g(X)$ とするとき，$g(X)$ を求めよ。

(2) $g(X)$ の増減を調べよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

2 （下書き用紙）

3 関数

$$f(x)=-x^4+8x^3-18x^2+11$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフの概形をかけ。

(2) $y=f(x)$ と異なる2点で接する直線の方程式を求めよ。

(3) $y=f(x)$ と(2)で求めた直線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ （下書き用紙）

4 関数

$$f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = r\sin(2x + \alpha)$ $(r > 0)$ と表すとき，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ が最大となるときと最小となるときの $\sin 2x$，$\cos 2x$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が最大となるときと最小となるときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ。

4 （下書き用紙）

5 楕円 C_1：$6x^2+4y^2=3$ と曲線 C_2：$8x-8y^2=1$ について，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交することを証明せよ。

(2) $x>0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 （下書き用紙）

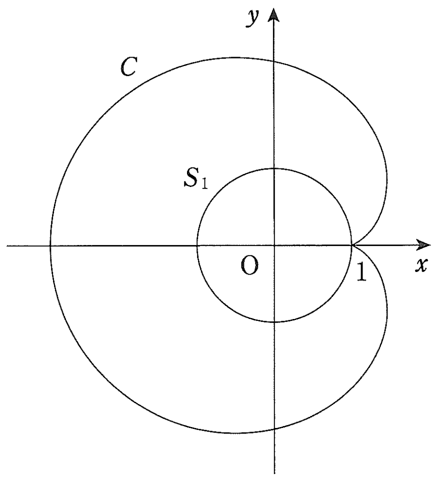
6 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=\alpha$（$0^\circ<\alpha<90^\circ$）とする。辺OC上の点Pと辺AB上の点Rを，線分PRの長さが最小になるような位置にとる。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\cos\alpha=x$とし，線分PRの長さをxの関数として表せ。

(2) 線分OAの中点をM，線分BCを5：9に内分する点をNとする。線分PRと線分MNが交わるようにxの値を定めよ。

6 （下書き用紙）

7 xy 平面上に原点Oを中心とする半径1の円 S_1 と，点Aを中心とする半径1の円 S_2 がある。円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する。点Aの出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点をPとする。点Aが $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点Pの描く曲線を C とすると，図のようになる。また，動径OAと x 軸の正の部分とのなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点Pの座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ。

(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

7 （下書き用紙）

8 すべての正の実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の(a)，(b)を満たすものとする。

(a) すべての正の実数 x，y に対して

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

(b) すべての自然数 n に対して

$$f(n)<f(n+1)$$

この関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) x を正の実数とするとき，次の値を求めよ。

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(2) a を $a>1$ を満たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$f(a)>0$$

(3) a，b を $0<a<b$ を満たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$f(a)<f(b)$$

(4) a，b が $0<a<b$ を満たす実数でも(3)の不等式が成り立つことを用いて，正の実数 x，y に対して，次の不等式を証明せよ。

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$