平成22年度　入学試験問題

数　　学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. **各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。**
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
経済学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$		
医学部	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$
歯学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
薬学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
工学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
環境科学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$		
水産学部	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$		

1 a，bは実数で，$a > 1$とする。tの関数

$$f(t) = 2t^3 - 3(a+1)t^2 + 6at + b$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 関数$f(t)$の極値を，a，bを用いて表せ。

(2) aの値をx座標，bの値をy座標とするxy平面上の点P(a, b)を考える。このとき，3次方程式$f(t) = 0$が相異なる3つの実数解をもつような点P(a, b)の存在する領域Dをxy平面上に図示せよ。

(3) DおよびDの境界からなる領域をEとする。領域Eのうち，

$$y \leqq -x^2 + 4x - 11$$

を満たす部分の面積を求めよ。

1 （下書き用紙）

$\boxed{2}$ 正三角形ABCにおいて，線分ABを2：1に内分する点をD，線分BCの中点をE，点Eから直線ABに引いた垂線とABの交点をHとする。また，$\overrightarrow{HB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{HE}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AH}$，$\overrightarrow{DB}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 線分HE上の点Fが $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{CD}$ を満たすとき，Fは線分EHを2：1に内分することを示せ。

2 （下書き用紙）

$\boxed{3}$ $\angle A = \frac{\pi}{2}$，$\angle B = \alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点Pが，点A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) △ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2) △BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。

3 （下書き用紙）

4 a を $a>1$ を満たす定数とする。原点Oと点 P(1, 0) を線分で結び，点Pと点 Q(a, $\log a$) を曲線 $y=\log x$ で結ぶ。このようにして得られる曲線OPQを，y 軸の周りに1回転させてできる立体の容器を考える。ただし，OPを含む部分を底面として，水平に置くものとする。次の問いに答えよ。

(1) この容器の容積 V を a を用いて表せ。

(2) m を正の定数とする。この容器に，単位時間あたり m の水を一定の割合で注ぎ入れる。ただし，最初は水が全く入っていない状態とする。注ぎ始めてから時間 t $\left(0<t<\dfrac{V}{m}\right)$ が経過したとき，底面から水面までの高さを h，水面の上昇する速度を v とする。h および v を m，t を用いて表せ。

$\boxed{4}$ （下書き用紙）

$\boxed{5}$ a, b を $a > b > 0$ を満たす定数とし，

$$\begin{cases} a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_1 = b, \ b_{n+1} = 2a_n b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定義される数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を考える。次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{c_n\}$を $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定義するとき，その一般項 c_n を a，b を用いて表せ。

(2) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項 a_n，b_n を a，b を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$a + b < 1$ が成り立つことを証明せよ。

5 （下書き用紙）

6 xyz 空間において，底面の半径が 2，高さが 4 である直円柱

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq z \leqq 4 \end{cases}$$

を考える。この円柱内で，さらに

$$\begin{cases} z \leqq (x-2)^2 \\ z \leqq y^2 \end{cases}$$

を満たす点$(x,\ y,\ z)$からなる立体を V とする。次の問いに答えよ。

(1) 立体 V を平面 $x = t\ (-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口の面積を $A(t)$ とする。$A(t)$ を t を用いて表せ。

(2) 立体 V の体積を求めよ。

6 （下書き用紙）

7 4次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，次のことは既知としてよい。

> 自然数 k，l，m が次の条件
>
> (イ) k と l は1以外の公約数をもたない
>
> (ロ) k は lm の約数である
>
> を満たすならば，k は m の約数である。

(1) a，b，c，d は整数で，$d \neq 0$ とする。次の方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2) 次の方程式

$$2x^4 - 2x - 1 = 0$$

の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。

7 （下書き用紙）