平成19年度　入学試験問題（前期日程）

数　　学

試験時間　120分（10：00〜12：00）

医学部（医学科）

問題冊子・・・問題：$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$，ページ：1〜2

解答用紙・・・3枚（問題冊子に折り込まれています）

計算用紙(白紙)・・・1枚（問題冊子に折り込まれています）

この表紙をよく読んでください。ただし，試験開始の合図があるまではこの冊子を開いてはいけません。

注　意　事　項

1. 受験票を机の上に置いてください。
2. 問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および汚れ等により解答に支障がある場合には，手を挙げて監督者に知らせてください。
3. 各解答用紙の右上に受験番号を記入する欄があります。3 枚の解答用紙のそれぞれに受験番号を記入してください。
4. 解答用紙の問題番号の印刷してある面にその番号の問題の解答を書いてください。裏面には解答または解答の続きを書いてはいけません。なお，解答用紙には，必要事項以外は記入してはいけません。
5. 計算用紙(白紙)は回収しませんので，各自自由に使用してください。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，解答用紙を回収します。問題冊子，計算用紙(白紙)は持ち帰ってください。
8. 試験終了時刻までに解答が終了しても，途中退室は認めません。

1 k を正の実数とする。円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(x,\ y)$ の y 座標だけを k 倍して得られる楕円を E_k とし，E_k 上の点 $(\cos\theta,\ k\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(f(k),\ 0)$，$(0,\ g(k))$ と表す。

(1) E_k の方程式を求め，概形をかきなさい。

(2) $f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であることを示しなさい。

(3) 楕円 E_k の焦点を F_k，F'_k とする。ただし，$k=1$ のときは F_1，F'_1 をともに原点とする。楕円 E_k 上の点 P に対し，$h(k)=\mathrm{PF}_k+\mathrm{PF}'_k$ とおく。このとき，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)-h(1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{h\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)-h(1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

をそれぞれ求め，$h(x)$ の微分可能性について述べなさい。

(4) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，接線と楕円 E_k，x 軸，y 軸で囲まれる図形は接点 $(\cos\theta,\ k\sin\theta)$ で二つの領域に分けられるが，この領域の面積比を求めなさい。

（６０点）

2 すべての成分が１または素数である行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2-8A+12E=O$ をみたしているとする。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，以下の各問に答えなさい。

(1) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) 題意をみたす A をすべて求めなさい。

(3) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をみたす実数 k と列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在する。ただし，$k\neq 0$ かつ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。k を求めなさい。

(4) $\dfrac{1}{6^n}A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ と表したとき，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{4}\quad かつ\quad \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}d_n=\frac{3}{4}$$

をみたしているとする。このとき，A を求めなさい。

（７０点）

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0)$ について，以下の各問に答えなさい。

(1) $x > 0$ のとき， $\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示しなさい。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ を求めなさい。

(3) $f(x)$ の増減を調べなさい。

(4) 次式が成り立つことを示しなさい。

$$\log f\left(\frac{1}{n}\right) + n\int_{\frac{1}{n}}^{1} \log f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} \log f\left(\frac{k}{n}\right) < \log 2 + n\int_{\frac{1}{n}}^{1} \log f(x)\,dx$$

(5) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) f\left(\frac{3}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めなさい。

（７０点）