1 変数 θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲を動くとき，θ の関数

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta - 9\sin\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta + 1$$

について，次の各問に答えよ。

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とするとき，t のとる値の範囲を求めよ。

(2) θ の関数 $f(\theta)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ。

(3) t が (1) の範囲を動くとき，関数 $g(t)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

2 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x - e^{x-1}$ について，方程式 $f(x) = 0$ は正の解をただ1つもつことを示し，その解を求めよ。

(2) $x > 0$ で曲線 $y = 2x^2 \log x$ と曲線 $y = kx^2 - k$ $(k > 0)$ が共有点において，共通の接線をもつように定数 k の値を定めよ。

(3) (2) の k の値とそのときの共有点の x 座標 α に対して，

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} (2x^2 \log x - kx^2 + k)\,dx$$

を求めよ。ただし，必要があれば $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい。

3 次の３問のうちから１問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

3 — 1 次の各問に答えよ。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(2) 二つの整数の平方の和で表される数の全体からなる集合を A とする。
x，y が集合 A の要素であるとき，積 xy もまた集合 A の要素であることを証明せよ。

(3) (2) の集合 A に対して，５および 5^5 は A の要素であることを証明せよ。

3 — 2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。数列 $\{a_n\}$ が

$a_2=3$，$nS_n=(n-1)(2a_n+2-n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたしているとき，次の各問に答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は $na_{n+1}-2(n+1)a_n=n+2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたすことを証明せよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{n}(a_n+1)$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1)$ を n の式で表せ。

3 — 3 円 O の直交する二つの直径 PQ と RS に対して，OR の延長上に点 A を PA ＝ PQ となるようにとる。PA と円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分 OA の交点を B とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 点 M は線分 PA の中点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さの比 AP : PB と AR : RB を求めよ。

(3) 線分 PR は ∠APB の二等分線であることを証明せよ。

4 次の3問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

4—1 三角形ABCにおいて，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=120°$ とし，実数 $k>0$，$l>0$ に対して，$4\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ で与えられる点をP，直線APと直線BCとの交点をDとし，$\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AD}$ で与えられる点をQとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 線分の長さの比 BD：DC を k を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ となるとき，k の値を求めよ。

(3) (2) の k の値に対して，点Qが三角形ABCの外接円の周上にあるとき，l の値を求めよ。

4—2 i を虚数単位とするとき，次の各問に答えよ。

(1) 複素数 z に対して，$\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるとき，複素数平面において点 z はどのような図形を描くか。

(2) (1) で与えられる図形上の原点O，A(α)，B(β)が正三角形の頂点をなすとき，複素数 α，β を求めよ。ただし，$0°\leqq\arg\alpha<\arg\beta<360°$ とし，$\arg z$ は z の偏角を表す。

4—3 3個のさいころを同時に振るものとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 次の確率を求めよ。

(a) 1の目のみが3個出る確率

(b) 1と2の両方の目が出て，その他の目が出ない確率

(c) 1と2と3の3種類の目が1個ずつ出る確率

(2) 出る目の最大値を M，最小値を m とする。$M-m=k$ となる確率 p_k $(0\leqq k\leqq 5)$ を求めよ。ただし，必要ならば $k\geqq 2$ の計算には，次の事項 (i), (ii) を用いてもよい。

(i) 出る目の数は，m，$m+k$ の2種類の目のみの場合と m，$m+k$，$m+i$ $(1\leqq i\leqq k-1)$ の3種類の目の場合のいずれかである。

(ii) $1\leqq m\leqq 6-k$ である。

5 次の 4 問のうちから 1 問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

5－1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の手順で A^n を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(1) $x^2 - yz = 1$，$x > 0$ とする。行列 $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ が $P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P = A$ をみたすように x，y，z を定めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ であることを証明せよ。

(3) A^n を求めよ。

5－2 xy 平面において，原点 O と直線 $x = 2$ からの距離の比が $\sqrt{r} : 1$ であるような点 P について，次の各問に答えよ。

(1) 点 P の軌跡を C とするとき，曲線 C の方程式を求めよ。

(2) $r = 2$ のとき，軌跡 C はどのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け。

(3) 軌跡 C が，長軸の長さが $\sqrt{5}$ であるような楕円になるときの r の値を求めよ。

5 − 3 関数 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ について，次の各問に答えよ。

(1) 3次方程式 $f(x) = 0$ の正の解の個数は1個であることを証明せよ。

(2) (1) の解をニュートン法で計算する式は

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 2x_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となることを証明せよ。

(3) この方程式の正の解の近似値を，ニュートン法を用いて計算する。$f(\frac{3}{2})$ と $f(2)$ の絶対値 $|f(\frac{3}{2})|$，$|f(2)|$ の小さい方の x の値 x_1 を求めよ。さらに，x_1 を初期値として，正の解の近似値 x_2 を求めよ。

5 − 4 確率変数 X は，n 個の値 $1, 2, \cdots, n$ を等しい確率でとるものとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 確率変数 X の平均値と標準偏差を求めよ。

(2) 確率変数 $Y = 2X - 1$ の平均値 m と標準偏差 σ を求めよ。

(3) $|Y - m| < \sqrt{3}\sigma$ を証明せよ。ただし，$n \geqq 2$ とする。