1 θ は $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にあるとして，次の各問いに答えよ。

(1) 不等式 $|\tan\theta| < \dfrac{1}{\cos\theta}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) x に関する方程式 $3^x - 3^{-x} = 2\tan\theta$ の解を 3 を底とする対数を用いて表せ。

(3) (2)にある方程式の解が $x = \dfrac{1}{2}$ であるとき，θ の値を求めよ。

2 関数$f(x)=-x+2\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$と$y=f(x)$が表す曲線$C$について，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$を積分を含まない形で表わせ。

(2) $f(x)$の$0 \leqq x \leqq 2\pi$の範囲における極値とそのときのxの値を求めよ。

(3) 点$\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2},\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$における$C$の法線$L$を表す方程式$y=g(x)$を求め，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲では$f(x) \leqq g(x)$であることを示せ。

(4) LとCおよびy軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

3 次の3問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

3―1 a, b は自然数とする。a を8で割った余りを r, b を8で割った余りを s とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $a+b$ を8で割った余りと $r+s$ を8で割った余りが等しいことを示せ。

(2) a^2 を8で割った余りと r^2 を8で割った余りが等しいことを示せ。

(3) 平方数を8で割ったとき，余りとしてえられる数をすべて求めよ。ただし，平方数とは自然数の平方となっている数のことである。

(4) 2つの平方数の和を8で割ると余りは3にはならないことを示せ。

3―2 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=6$, $a_{n+1}=a_n+16n+8$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(3) 和 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ を求めよ。

3―3 次の各問いに答えよ。

(1) △PQRの辺QR上の点Sが $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QS}}:\overline{\mathrm{SR}}$ を満たすとき，∠QPS＝∠RPSが成り立つことを証明せよ。ただし，$\overline{\mathrm{PQ}}$ は線分PQの長さを表すものとし，他も同様とする。

(2) AD // BC, $\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{BC}}$ を満たす台形ABCDがある。辺BC上の点Fは $\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{BC}}$, AF // DCを満たしているとする。このとき，AFとBDの交点をGとすると，△BAGは二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) (2)の条件のもとで，辺AD上の点Eは $\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{ED}}$ を満たしているとする。このとき，BEとAFは直交することを証明せよ。

4 次の3問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

4—1 平面上の3点O，A，Bは同一直線上にないとし，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の長さはそれぞれ$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=8$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7$とする。点Pは線分ABを2：1に内分する点とする。また，2点O，Pを通る直線と，線分ABの垂直二等分線との交点をEとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たす実数$s$，$t$を求めよ。

4—2 α，β，γはいずれも0でない複素数として，次の各問いに答えよ。ただし，複素数zに対して，$\bar{z}$はzの共役複素数，$|z|$はzの絶対値を表す。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$が正の実数ならば，$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$が成り立つことを示せ。

(2) $\gamma+\bar{\gamma}=2|\gamma|$が成り立つならば，$\gamma$は正の実数であることを示せ。

(3) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$が成り立つならば，$\dfrac{\alpha}{\beta}$は正の実数であることを示せ。

4—3 1から$n\,(n>3)$までの数字$1, 2, 3, \cdots, n$を1つずつ書いたn枚のカードが入っている箱の中から，同時に2枚のカードを取り出す。この2枚のカードに書いてある数字を$X, Y\,(X>Y)$とする。いま，自然数s, tは$1\leqq s<t\leqq n$を満たしているとして，次の各問いに答えよ。

(1) 次の各確率を求めよ。

(a) $X=t$かつ$Y=s$である確率$P(X=t, Y=s)$

(b) $X=t$である確率$P(X=t)$

(c) $Y=s$である確率$P(Y=s)$

(d) $X=3Y$である確率$P(X=3Y)$

(2) X，Yの平均をそれぞれ$E(X)$，$E(Y)$とするとき，$E(X)+E(Y)$を求めよ。

5 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

5―1 行列 M は等式 $3(2E-M)=AB-M+A$ を満たしている。ただし，

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-9 & 20\\ 7 & -17\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ とする。

このとき，次の文中にある空欄(　　　)に適する行列および数を求め，その結果だけを解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。

(1) 行列 M を求めると $M=($ ア $)$ である。

(2) 実数 α，β は $(M-\alpha E)M=\beta(M-\alpha E)$，$\alpha\leqq\beta$ を満たしている。このとき，$\alpha=($ イ $)$，$\beta=($ ウ $)$ である。

(3) 実数 u は $M^5-\alpha M^4=u(M-\alpha E)$ を満たしているとすると，$u=($ エ $)$ である。ただし，α は(2)で求めた数である。

5―2 次の文中にある空欄(　　　)に適する数を求め，その結果だけを解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。

(1) 点 $(1, 1)$ と直線 $y=-2$ からの距離が等しい点の軌跡は放物線であり，その方程式は $y=ax^2+bx-\dfrac{1}{3}$ である。このとき，$a=($ ア $)$，$b=($ イ $)$ である。

(2) 2点 $(3, 0)$，$(-1, 0)$ からの距離の和が12である点の軌跡は楕円であり，その方程式は $\dfrac{(x-r)^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=1$ である。このとき，$p=($ ウ $)$，$q=($ エ $)$，$r=($ オ $)$ である。

5 — 3 関数$f(x)$の区間$[a,\ b]\ (a<b)$における定積分の近似値として，$[a,\ b]$をn等分してえられる，次のA_n，B_n，T_nを考える。

$$A_n=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)h,\quad B_n=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)h,\quad T_n=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}h$$

ただし，$h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_j=a+jh\ (j=0,\ 1,\ 2,\cdots,n)$である。

このとき，次の文中にある空欄(　　)に適する式または数を求め，その結果だけを解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。

(1) T_nをA_n，B_nを用いて表すと$T_n=$(ア)である。

(2) 関数$f(x)=x^2$の$[0,\ 1]$における定積分の近似値A_n，B_n，T_nをnを用いて表すと$A_n=$(イ)，$B_n=$(ウ)，$T_n=$(エ)である。また，近似値T_nによる相対誤差が0.01以下になるような分割の数nの最小値は(オ)である。ただし，真の値Sの近似値sによる相対誤差は$\left|\dfrac{s-S}{S}\right|$である。

5 — 4 2つの変量x，yの値からなるN個の資料$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_N,\ y_N)$がある。この資料によるx，yの平均値をそれぞれ$\bar{x}$，$\bar{y}$とし，標準偏差をそれぞれσ_x，σ_yとする。また，σ_{xy}，$E(x^2)$および$E(xy)$を次で定める。

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y}),\quad E(x^2)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2,\quad E(xy)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_ky_k$$

このとき，次の文中にある空欄(　　)に適する式を求め，その結果だけを解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。

(1) σ_xを$\bar{x}$および$E(x^2)$を用いて表すと$\sigma_x=$(ア)である。

(2) σ_{xy}を$\bar{x}$，$\bar{y}$および$E(xy)$を用いて表すと$\sigma_{xy}=$(イ)である。

(3) xとyの相関係数rをσ_x，σ_yおよびσ_{xy}を用いて表すと$r=$(ウ)である。ただし，$\sigma_x\sigma_y\neq 0$とする。

(4) $\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k-tx_k-1)^2$の値を最小にする実数$t$の値を$\bar{x}$，$E(x^2)$および$E(xy)$を用いて表すと$t=$(エ)である。ただし，$E(x^2)\neq 0$とする。