$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) a，b はともに 0 でない定数とするとき，

$$a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)$$

が成り立つことを示せ。ここで α はある定数である。

(2) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ を(1)を用いて cos の式で表せ。α の値も求めよ。

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。そのときの θ の値もそれぞれ求めよ。

2 次の3問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

2—1 a, b, cを奇数とする。xについての2次方程式$ax^2+bx+c=0$に関して，次の各問いに答えよ。

(1) この2次方程式が有理数の解$\dfrac{q}{p}$をもつならば，pとqはともに奇数であることを背理法で証明せよ。ただし$\dfrac{q}{p}$は既約分数とする。

(2) この2次方程式が有理数の解をもたないことを(1)を利用して証明せよ。

2—2 下記の一連の等式が成立しているという(ただしmは自然数)。これについて，次の各問いに答えよ。

(1) ①の等式を証明せよ。

(2) 最下行の右辺の空欄に入る式を推測し，最下行の等式が成り立つことを証明せよ。なお，推測する式の中では，左辺と同様「…」を用いてよい。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \boxed{}$$

2—3 次の各問いに答えよ。

(1) 点Pは，定点B，Cを通る直線BCの一方の側にあって，∠BPCの大きさが一定であるように動くとする。点Iが△PBCの内心であるとき，∠BICが一定であることを示せ。

(2) 点Pが正3角形ABCの外接円上を動くとする(ただし点Pは点B，Cに一致しないとする)。△PBCの内心Iの軌跡を求め，これを図示せよ。

3 次の3問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

3—1 $\triangle$OAB において，OA $=3$，OB $=2$ とし，辺 AB の中点を M，$\angle$AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とする。また，直線 OD に点 A から下ろした垂線の足を E とし，直線 OM と直線 AE の交点を F とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

3—2 複素数平面上において，次の各々はどのような図形を表すかを答えよ。

(1) 複素数 z が $|z|=1$ および $z\neq 1$ を満たすとき，$w=\dfrac{1}{1-z}$ が表す点の全体。

(2) 複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，$w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ が表す点の全体。

(3) 複素数 z が $|z|=1$ および $0^\circ<\arg z<90^\circ$ を満たすとき，$w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ が表す点の全体。

3—3 1，2，3，4，5の番号をつけた5枚のカードがある。カード1枚をでたらめに取り出し，取り出したカードはもとに戻す試行を繰り返す。ただしこの試行は，取り出したカードの番号が4以上であるか，または取り出したカードの番号の和がはじめて4以上になったときに終了する。カードを取り出した回数を X とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 確率 $P(X=1)$ および $P(X=2)$ を求めよ。

(2) X の確率分布および平均(期待値) $E(X)$ を求めよ。

(3) 取り出したカードの番号の和が8である確率を求めよ。さらに，取り出したカードの番号の和が8であるときに，カードを取り出した回数が2回である条件つき確率を求めよ。