数　　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部（医学科）・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は5ページである。
3. 学部名と受験番号は，必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
7. 解答用紙は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 a，b は実数で，関数

$$f(x) = 2^{3x} - a\,2^{2x} + a\,2^{x+1} - b$$

のグラフは x 軸と相異なる3点 0，α，β $(\alpha < \beta)$ で交わるものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $2^x = t$ とおいて，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とする。$g(t)$ を求めよ。

(2) b および $\alpha + \beta$ を，a を用いて表せ。

(3) α，β が

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}t + 1\right)dt = 2(\beta - \alpha)$$

を満たすとき，a の値を求めよ。さらに，そのときの α，β の値を求めよ。

2 次の各問いに答えよ。

(1) 微分可能な2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ の導関数を定義に従って求めよ。

(2) a を実数とするとき，関数 $y = (1 + x^2)^a$ の導関数を求めよ。

(3) 関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ。

(4) n が正の整数であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{1 + n^2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \cdots\cdots + \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}$$

3 次の各問いに答えよ。

(1) 10桁の自然数で，各桁の数の合計がちょうど3になるものはいくつあるか。

(2) 10桁以下の自然数で，各桁の数の合計がちょうど4になるものはいくつあるか。

(3) 右から読んでも左から読んでも同じ数になる自然数を「回文数」と呼ぶ。例えば1233321，467764は回文数であるが，12333210は回文数ではない。10桁以下の自然数の中に回文数はいくつあるか。

4 4点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$を頂点とする四面体ABCDについて，ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて，次の各問いに答えよ。

(1) △ABCの重心Gの位置ベクトル$\vec{g}$と，△BCDの重心Hの位置ベクトル$\vec{h}$を求めよ。

(2) 2点D，Gを通る直線l_1の方程式を求めよ。2点A，Hを通る直線l_2の方程式を求めよ。

(3) (2)の2直線l_1，l_2は交点を持つことを示し，その交点の位置ベクトルを求めよ。

5 次の４問のうちから１問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

5―1 ２次の正方行列 A，B について，次の各問いに答えよ。

(1) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ となるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示せ。

(2) E を単位行列とする。行列 P を用いて $A = P + E$ と表されるとき，行列 X について $AX = XA$ となるための必要十分条件は $PX = XP$ であることを示せ。

(3) q は０でない数とする。$A = \begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$AX = XA$ となる行列 X は $X = kA + lE$（k，l は実数）の形に表されることを示せ。

5―2 次のように，円 C_1 は直交座標に関する方程式で表され，曲線 C_2 は極方程式で表されている。

$$C_1：\quad x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0$$

$$C_2：\quad r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta}$$

このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 円 C_1 を媒介変数を用いて表せ。

(2) 曲線 C_2 はどんな曲線になるか。また，その概形もかけ。

(3) 円 C_1 の中心を通り曲線 C_2 に接する直線の方程式を求めよ。

5 — 3 A チームと B チームは毎日 1 回野球の試合をする。毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする。どちらかのチームが 3 連勝したときにそのチームの優勝とする。1 回目の試合では，A チームの勝つ確率は B チームの勝つ確率の 2 倍である。また，2 回目の試合からは，A チームが勝つ確率は，前日の試合で勝ったときは B チームの勝つ確率の 2 倍であり，負けたときは B チームの勝つ確率の $\frac{1}{3}$ 倍である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 1 回目の試合で A チームが勝つ確率 P_A と B チームが勝つ確率 P_B を求めよ。

(2) 前日の試合で A チームが勝ったとき，今日の試合で A チームが勝つ確率 P_{AA} と，前日の試合で B チームが勝ったとき，今日の試合で B チームが勝つ確率 P_{BB} を求めよ。

(3) 4 回以内の試合で優勝が決まる確率を求めよ。

(4) 5 回目の試合で優勝が決まったことがわかっている。このとき A チームが優勝している確率を求めよ。

5 — 4 次の各問いに答えよ。ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z \geqq 1.53) = 0.063,\ P(Z \geqq 1.96) = 0.025,\ P(Z \geqq 2.32) = 0.010$$

である。

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$\dfrac{X-a}{b}$ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする。また，確率変数 Y が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$\dfrac{Y-c}{d}$ は，n が十分大きいならば，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする。このとき，$a,\ b,\ c,\ d$ を $m,\ \sigma,\ n,\ p$ を用いて表せ。

(2) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leqq x \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている。

$$f(x) = k - |x-1|$$

このとき，次の(a)，(b)に答えよ。

(a) k の値を求めよ。

(b) X の平均と標準偏差を求めよ。

(3) ある工場で 1 kg 入りと表示する製品が生産されている。この製品の重さは，平均 1 kg，標準偏差 50 g の正規分布に従っているという。この工場より 1000 個の製品を仕入れた。この中に 902 g 以下の製品は何個あると推測されるか。