数　学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 学部名と受験番号は，必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 方程式$x^3-1=0$の虚数解の一つをωとするとき，$\omega^4+\omega^2+1$の値を求めよ。

(2) $-2 \leqq m < 2$かつ$-2 < n \leqq 2$であるような整数の組$(m,\ n)$のうち，条件「$1 \leqq m$または$n < 0$」を満たすものの個数を求めよ。

(3) 半径rの円Oの外部の点Pからこの円に引いた接線の接点の一つをTとする。Tを端点とする円Oの直径TQをとる。三角形PTQの辺PQと円Oとの交点をRとするとき，PRの長さを求めよ。ただし，$\angle \mathrm{QPT} = 30°$とする。

(4) 正六角形の頂点の中から異なる3点を選んで三角形を作る。この三角形が正三角形にも二等辺三角形にもならない確率を求めよ。

2 関数$f(x)$は$f(0)=0$および$f(-1)=f(1)=3a$を満たす2次関数とし，関数$g(x)$を

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\frac{4}{a}$$

とする。ただし，aは0でない定数である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 関数$f(x)$を求めよ。

(2) 直線$y=3x+2$が曲線$y=g(x)$に接するように定数aの値を定めよ。さらに，その接点の座標を求めよ。

3 e を自然対数の底とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 積分 $\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ を計算することにより，次の等式を証明せよ。

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

(2) すべての自然数 n について，等式

$$e^x = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$e^x > 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p$$

4 平面に四角形ABCDがあり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおくとき，頂点Cは

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}$$

を満たすものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 直線ABとDCの交点をE，直線ADとBCの交点をFとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 線分BDの中点をQ，線分EFの中点をRとするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) 線分ACの中点をPとするとき，3点P，Q，Rは同一直線上にあることを証明せよ。

5 次の４問のうちから１問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

5—1 行列 A を，$A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ により与え，xy 平面での y 軸に関する点の対称移動を表す行列を B とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，A^n を求めよ。

(2) 行列 AB は xy 平面の原点を中心とする角 θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$) の回転移動を表す行列である。θ の値を求めよ。

(3) xy 平面の原点を中心とした 60° の回転移動を表す行列を C とするとき，$C^n B = A^n$ となる６以下の自然数 n を求めよ。

5—2 極方程式 $r = a\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で与えられる曲線を C_1 とする。ただし，a は正の定数である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 上の点 P と極 O を結ぶ直線 OP の点 P の側の延長上に $\mathrm{PQ} = a$ となるように点 Q をとる。点 P が C_1 上を動くときの点 Q の軌跡 C_2 の極方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた曲線 C_2 上の点 $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ を通り，点 Q と極 O を結ぶ直線に垂直な直線を l とする。直線 l の直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた直線 l は，点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とし半径が a の円に接することを証明せよ。

5 — 3 1，2，3，4の番号をつけた4枚のカードがある。この中からカードを1枚取り出しそこに書かれている番号を見る，という試行を繰り返す。ただし，取り出したカードはもとに戻さない。この試行は，取り出したカードに書かれた番号の合計が3の倍数になるか，または4枚全部を取り出したときに終了する。取り出したカードに書かれた番号の合計が3の倍数になったとき，この試行は成功したとよぶ。4枚全部を取り出したとき，この試行は失敗したとよぶ。この試行の得点Xは，成功したときは取り出したカードの枚数とし，失敗したときは0点とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 確率$P(X=1)$および$P(X=2)$を求めよ。

(2) この試行が成功する確率を求めよ。また，得点の平均(期待値)$E(X)$を求めよ。

(3) 取り出したカードに書かれた番号の和が6となる確率を求めよ。さらに，取り出したカードに書かれた番号の和が6であることが分かっているとき，$X=3$である条件つき確率を求めよ。

5 — 4 確率変数Zが平均0，分散1の標準正規分布$N(0,\ 1)$に従うとするとき，$P(Z>1.65)=0.05$，$P(Z>1.96)=0.025$であるとして，次の各問いに答えよ。

(1) 確率変数Xは平均65，分散20^2の正規分布$N(65, 20^2)$に従うとする。確率$P(X>c)$が0.05となるようなcを求めよ。

(2) 母平均m，母分散20^2の母集団から大きさ100の無作為標本を抽出し，その標本平均を$\overline{X}$とする。標本の大きさ100は十分大きい数であるとみなせるとする。このとき，$\overline{X}$が近似的に従う確率分布を答えよ。また，母平均mの信頼度95％の信頼区間を$\overline{X}$を用いて表せ。