数　学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 学部名と受験番号は，必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 実数x, yに関する次の各命題の真偽を述べよ。真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(a) $x \geqq y$ならば $x^2 \geqq y^2$ である。

(b) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2 \geqq y^2$ ならば $x \geqq y$ である。

(2) $20! = 2^m k$ (kは奇数)が成り立つとき，整数mの値を求めよ。

(3) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 種類の数字を，同じ数字をくり返し用いることを許して 3 桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は何個あるか。

(4) AB ≠ ACである鋭角三角形ABCの外心をO，重心をGとする。直線OGとAから辺BCにおろした垂線との交点をH，BCの中点をMとするとき，AH : OM を求めよ。

2 次の各問いに答えよ。

(1) 直線$4x - 3y = a$が放物線$y = -x^2 + 6x - 5$と接するとき，aの値と接点の座標を求めよ。

(2) 点(x, y)が連立不等式 $x^2 + y^2 \leqq 25$, $y \leqq -x^2 + 6x - 5$ の表す領域を動くとき，$4x - 3y$の最小値と最大値を求めよ。

3 関数$f(x)$を

$$f(x)=\begin{cases} x^3\log|x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) $0<x<1$ のとき，$0<-\log x<\dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示せ。

(2) 微分係数の定義を用いて$f'(0)=0$ であることを示せ。

(3) $x \neq 0$ のとき$f'(x)$を求めよ。

(4) 関数$f(x)$の極値を求めよ。

4 次の数列について，各問いに答えよ。

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{第1群}},\ \underbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}}_{\text{第2群}},\ \underbrace{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}}_{\text{第3群}},\ \cdots,\ \underbrace{\frac{1}{k},\ \frac{2}{k-1},\ \frac{3}{k-2},\ \cdots,\ \frac{k}{1}}_{\text{第}k\text{群}},\ \cdots$$

(1) $\dfrac{n}{m}$ は第何群の第何項か。ただし，m と n は正の整数とする。

(2) $\dfrac{n}{m}$ は数列の先頭から数えると何番目の項か。

(3) 数列の先頭から数えて1000番目の項 a を求めよ。

(4) a と値が等しい項のうちで最初に現れるのは，数列の先頭から数えて何番目か。

5 次の４問のうちから１問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

5 ― 1 $M=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。正方行列 A，B が

$$\alpha A+\beta B=M,\ A+B=E,\ AB=O$$

を満たしているとき，次の各問いに答えよ。ただし，α，β は $\alpha>\beta$ を満たす実数，E は単位行列，O は零行列である。

(1) $A^2=A$，$B^2=B$，$BA=O$ であることを示せ。

(2) A，B を α，β を用いて表せ。

(3) α，β および A，B を求めよ。

(4) n を自然数とするとき，M^n を求めよ。

5 ― 2 次の各問いに答えよ。

(1) 平面上の二点 $\mathrm{F}_1(-1,\ 0)$，$\mathrm{F}_2(1,\ 0)$ からの距離の和が $2a$ $(a>1)$ である楕円 C の方程式を求めよ。

(2) 楕円 C が直線 $x+y=2$ と接するとき，a の値と接点 P の座標を求めよ。

(3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき

$$\frac{\mathrm{PF}_1}{\mathrm{PF}_2}=\frac{\mathrm{QF}_1}{\mathrm{QF}_2}$$

であることを示せ。

5 — 3 容器の中にある種類の生物がいて，この容器の中では増殖しない。この生物に関して，次の性質を満たす定数 p があることが知られている。

[性質]　この生物の個体は k 日目に生存していれば，他の個体が何匹いるかにかかわりなく，$k+1$ 日目には確率 p で生存している $(k=1,2,3,\cdots)$。

k 日目に生存している個体数を X_k で表す。$X_1=n$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) $X_2=0$ となる確率を求めよ。

(2) $X_3=0$ となる確率を求めよ。

(3) $X_k>0$ であるが $X_{k+1}=0$ となる確率を求めよ。

5 — 4 次の各問いに答えよ。

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1\leqq x\leqq 1$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が，次の式で与えられている。

$$f(x)=\begin{cases} x+k & (-1\leqq x<0) \\ -x+k & (\ 0\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

(a) k の値と X の平均を求めよ。

(b) 確率 $P(-0.5\leqq X\leqq 0.5)$ を求めよ。

(2) 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする。標本平均 $\overline{X}$ は，n の値が大きいとき，近似的に正規分布 $N(x,\ y)$ に従う。ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うならば，$P(Z\geqq 1.00)=0.1587$，$P(Z\geqq 2.00)=0.0228$ である。

(a) x と y を m，σ，n を用いて表せ。

(b) 母平均 50，母標準偏差 20 の母集団から，大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき，確率 $P(46\leqq\overline{X}\leqq 52)$ を求めよ。ただし，標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする。