数　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は４ページである。
3. 学部名と受験番号を，必ず５枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の５題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて１枚ずつ計５枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 正の実数 a に関する次の各命題の真偽を述べよ。また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(a) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である。

(b) a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である。

(2) 4 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 7 になる確率を求めよ。

(3) $\triangle$ABC において，$\angle A = 75^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，AB $= 1$ とする。頂点 A を通り辺 BC に垂直な直線と $\triangle$ABC の外接円との交点を P とする。このとき，線分 AP の長さを求めよ。

2 次の各問いに答えよ。

(1) 直線 $l : y = ax + b$ が原点を中心とする半径 1 の円と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ で接しているとする。また，直線 l は放物線 $C : y = x^2 - \sqrt{3}\,x + c$ とも接しているとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(a) 定数 a，b の値を求めよ。

(b) 放物線 C と直線 l との接点の座標および定数 c の値を求めよ。

(c) 放物線 C と直線 l および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，

$$5\sin^2\theta + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$$

を満たす θ の中で最大のものを α とするとき，$\cos\alpha$ と $\tan 2\alpha$ の値を求めよ。

3 座標平面において，点 $C\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を S とする。S 上に点 $N(0,\ 1)$ をとり，$\overrightarrow{ON}=\vec{n}$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，O は原点を表すものとする。

(1) x 軸上に点 $P(x,\ 0)$ をとり，直線 NP と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q とする。$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とおき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OQ}=a\vec{p}+b\vec{n}$ の形で表したとき，a，b を x で表せ。

(2) x 軸上に 2 点 $P_1(x_1,\ 0)$，$P_2(x_2,\ 0)$ をとる。直線 NP_1 と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q_1 とし，直線 NP_2 と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q_2 とする。このとき，$x_1x_2=-1$ が成り立っていれば

$$\overrightarrow{CQ_1}+\overrightarrow{CQ_2}=\vec{0}$$

が成立することを証明せよ。ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表すものとする。

4 a を 0 以上の実数とし，$x>-1$ で定義された関数

$$f(x)=2x^2+(1-a^2)\log(x+1)$$

について，次の各問いに答えよ。

(1) 方程式 $f'(x)=0$ が $x>-1$ で異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) a が (1) で求めた範囲にあるとき，関数 $f(x)$ の極小値は $\dfrac{1-2\log 2}{2}$ より大きいことを証明せよ。

5 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

5—1 2次の正方行列A，Bについて，次の各問いに答えよ。

(1) 行列$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & b \\ c & d \end{pmatrix}$は原点のまわりの回転移動を表し，$b > 0$である。行列$A$を求めよ。

(2) 行列Bの表す移動(1次変換)に続いて行列Aの表す移動を行うことで得られる合成移動(合成変換)はy軸に関する対称移動になる。行列Bを求めよ。

(3) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$を満たす点$(x,\ y)$の集まりは直線となることを示せ。また，その直線を表す式を求めよ。

(4) $B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$を満たす列ベクトル$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$を求めよ。また，この列ベクトルと自然数$n$に対し，$B^n\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$を求めよ。

5—2 $x^2 - y^2 = 2$で表される曲線をCとし，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$をC上の点とする。次の各問いに答えよ。

(1) 曲線Cの点Pにおける接線lの方程式は

$$x_0x - y_0y = 2$$

となることを証明せよ。

(2) 原点Oからlに下ろした垂線をOHとする。Hの座標を$(x_1,\ y_1)$とするとき，x_1，y_1をx_0とy_0で表せ。

(3) F(1，0)，F′(−1，0)とする。FH・F′Hは点Pの取り方によらず一定であることを証明せよ。また，その値を求めよ。

5—3 袋の中に1の数字が書かれている球が5個，2の数字が書かれている球が3個，5の数字が書かれている球が2個の合計10個の球が入っている。1個の球を取り出して，その球に書かれている数を確認し，もとに戻すことを繰り返す。i 回目に取り出した球に書かれている数を X_i とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) X_1 の確率分布を表で表せ。また，X_1 の平均と分散を求めよ。

(2) $Z = X_1 + X_2$ の確率分布を表で表せ。また，確率 $P(Z \leqq 4)$ の値を求めよ。

(3) $W = X_1 - X_2$ とするとき，

$$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$$

を満たす整数 a の最大値を求めよ。

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が $n+1$ となる確率を求めよ。

5—4 数字1が書かれたカードが1枚，数字2が書かれたカードが2枚，数字3が書かれたカードが1枚の合計4枚のカードがある。この4枚のカードを母集団とし，カードに書かれている数字を変量とする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを1個ずつ取り出すことを復元抽出といい，取り出したものをもとに戻さずに続けて抽出することを非復元抽出という。

(1) 母平均 m と母標準偏差 σ を求めよ。

(2) この母集団から，非復元抽出によって，大きさ2の無作為標本を抽出し，そのカードの数字を取り出した順に Y_1，Y_2 とする。標本平均 $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ の確率分布，期待値 $E(\overline{Y})$，標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ を求めよ。

(3) この母集団から，復元抽出によって，大きさ200の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする。このとき，標本平均 $\overline{X}$ が近似的に正規分布に従うとみなすことができるとして，$P(\overline{X} < a) = 0.05$ を満たす定数 a を求めよ。ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$ とする。