大阪医科薬科大学

2024 年度　一般選抜　数学

1 $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n \geqq 2$ であることを示せ．

(2) ある自然数 n に対して，$a_n < \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} > \sqrt{5}$，また，$a_n > \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} < \sqrt{5}$ であることを示せ．

(3) すべての自然数 n に対し，

$$|a_{n+1} - \sqrt{5}| \leqq \frac{\sqrt{5} - 2}{4} |a_n - \sqrt{5}|$$

であることを示せ．

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

2 座標空間に点 A(2,\ 1,\ 3) と点 B(1,\ 3,\ 4) があり，また zx 平面上を動く点 P と yz 平面上を動く点 Q がある．次の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結果のみ解答せよ．

(1) 線分の長さの和 AP + BP の最小値を求めよ．また和が最小になるときの点 P の座標を求めよ．

(2) 3 つの線分の長さの和 AP + PQ + BQ の最小値を求めよ．また和が最小となるときの点 P，点 Q の座標を求めよ．

3 e は自然対数の底とし，a，b は実数定数とする．座標平面内の曲線

$$C\colon y = f(x) = \frac{e^{x-a} + e^{-x+a}}{2} + b$$

および直線

$$L\colon y = g(x) = x$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおく．極限 $\lim_{x\to\infty} h(x)$ と $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ を求めよ．必要ならば，$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ が成り立つことを用いてよい．

(2) C と L が接するための a，b の条件を求めよ．

(3) C と L が相異なる 2 点で交わるための a，b の条件を求めよ．

4 xy 平面上で点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，

$$x = r, \quad y = \sin\theta\cos^2 r + \sin\theta\cos r + 1$$

を満たしながら動くものとする．r，θ は実数として，次の問いに答えよ．

(1) $\theta = \frac{\pi}{2}$ かつ $0 \leqq r \leqq \pi$ を満たしながら r が変化するとき，点 P の描く曲線を求め図示せよ．

(2) $\frac{\pi}{4} \leqq r \leqq \frac{\pi}{2}$ かつ $\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ を満たしながら r，θ が変化するとき，点 P が動く領域の面積を求めよ．