山口大学

2019 年度　前期日程　数学

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えなさい．

(1)　2 次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ の 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ を求めなさい．ただし，$\alpha > \beta$ とする．

(2)　(1) で求めた $\alpha,\ \beta$ に対して，$b_n = \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示しなさい．

(3)　(2) で定めた数列 $\{b_n\}$ の一般項と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．

(4)　極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

2 関数 $f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = \cos^2 x$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　関数 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，グラフをかきなさい．

(2)　$0 < a < \dfrac{\pi}{4}$ とする．2 つの曲線 $y = f(x),\ y = g(x)$ および 2 つの直線 $x = 0,\ x = a$ で囲まれる部分の面積を S とする．また，曲線 $y = f(x)$ の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線と，曲線 $y = g(x)$ の点 $\mathrm{B}(a,\ g(a))$ における接線の交点を C とし，$\triangle$ABC の面積を T とする．

(i)　S を a を用いて表しなさい．

(ii)　点 C の座標を a を用いて表しなさい．

(iii)　$S + T = \dfrac{5}{8}$ が成り立つとき，a の値を求めなさい．

3 $x > 0$ とする．点 O を原点とする座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(x,\ 0,\ 4)$ の定める平面を α とする．α における $\triangle$ABC の外心を P とするとき，次の問いに答えなさい．

(1)　線分 AB の中点 M の座標を求めなさい．また，線分 AC の中点 N の座標を，x を用いて表しなさい．

(2)　$\angle\mathrm{AOB} \leqq \angle\mathrm{BOC}$ のとき，x のとり得る値の範囲を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \angle\mathrm{AOB} \leqq 180^\circ$，$0^\circ \leqq \angle\mathrm{BOC} \leqq 180^\circ$ とする．

(3)　$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC}$ のとき，点 P の座標を求めなさい．

4 次の問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位である．

(1) 複素数平面上で等式

$$|3z-4i|=2|z-3i|$$

を満たす点 z の全体はどのような図形を表すか答えなさい．

(2) 複素数 z が (1) の等式を満たすとき，$\left|z+\dfrac{1}{z}+2i\right|$ の最大値と最小値を求めなさい．また，そのときの z の値をそれぞれ求めなさい．

5 次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $x>\log(1+x)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ は，$x \geqq 0$ で定義された連続関数で，$f(0)=0$ を満たし，$x>0$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする．$x>0$ で常に $f''(x)<0$ ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{x}$ は $x>0$ で減少することを示しなさい．

(3) $0<a<b<1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{a}{b}<\frac{\log(1+a)}{\log(1+b)}<\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{a}{b}$$

6 三角形の 3 頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わる．その点を三角形の垂心という．△ABC の外心を O，垂心を H とするとき，次の問いに答えなさい．ただし，△ABC は直角三角形ではないとする．

(1) 直線 OB と △ABC の外接円との交点で B でない点を D とする．四角形 AHCD は平行四辺形であることを示しなさい．

(2) 辺 BC の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が成り立つことを示しなさい．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が成り立つことを示しなさい．

7 実数 x に対して，$3n \leqq x < 3n+3$ を満たす整数 n により，

$$f(x) = \begin{cases} |3n+1-x| & (3n \leqq x < 3n+2 \text{ のとき}) \\ 1 & (3n+2 \leqq x < 3n+3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．関数 $f(x)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 7$ のとき，$y = f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) 0 以上の整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_{3n}^{3n+3} f(x)e^{-x}\,dx$ とする．I_n を求めなさい．

(3) 自然数 n に対して，$J_n = \displaystyle\int_{0}^{3n} f(x)e^{-x}\,dx$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n$ を求めなさい．

8 次の問いに答えなさい．

(1) $p,\ q,\ r$ を実数とする．$p-q=r$ ならば，$|p|$ と $|q|$ のうち少なくとも一方は $\dfrac{|r|}{2}$ 以上であることを示しなさい．

(2) $a,\ k$ は実数で，$a>0,\ k \geqq 0$ とする．関数 $f(x)=ax^2$ の $k-5 \leqq x \leqq k-3$ における最大値を L，最小値を S とする．このとき，不等式 $L-S \geqq a$ が成り立つことを示しなさい．

(3) $a,\ b,\ c$ は実数で，$a>0,\ b \geqq 0$ とする．関数 $g(x)=|ax^2+bx+c|$ の $-5 \leqq x \leqq -3$ における最大値を M とする．このとき，不等式 $M \geqq \dfrac{a}{2}$ が成り立つことを示しなさい．