愛媛大学

2024 年度　前期日程　数学

1 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = -x^3 + 3x - 1$ の極値を求めよ.

(2) $0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $4\sin x \cos x = \sqrt{3}$ を解け.

(3) 第 2 項が 6 で，初項から第 3 項までの和が 21 であり，公比が 1 より小さい等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ.

(i)　出た目の積が奇数になる確率

(ii)　出た目の積が 4 の倍数になる確率

(5) a, b を実数とし，i を虚数単位とする．$1+i$ が 3 次方程式 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ の解であるとき，a, b の値を求めよ.

2 以下の問いに答えよ.

(1) n が自然数のとき，$3^{n+1} + 7^n$ が 4 の倍数であることを証明せよ.

(2) s, t を $s > t > 0$ を満たす実数とする.

(i)　不等式 $\dfrac{s+t}{2} > \sqrt{st}$ が成り立つことを証明せよ.

(ii)　$\log_{10} \dfrac{s+t}{2}$ と $\dfrac{\log_{10} s + \log_{10} t}{2}$ の大小を調べよ.

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} 2x - y < 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする.

(i)　D を座標平面上に図示せよ.

(ii)　点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は領域 D 内にあるとする．P を中心とする半径 1 の円が，2 直線 $2x - y = 0$, $x + y = 0$ の両方に接するとき，s と t の値を求めよ.

3 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数とする．座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{B}(0,\ -2,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{C}(t,\ t,\ 0)$ がある．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とする．

(i) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(ii) $\sin\theta$ を t を用いて表せ．

(iii) S を t を用いて表せ．

(iv) S の最小値を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2-\dfrac{3}{4}$ を C とする．C 上の点 P における C の接線を l とし，l の傾きは 1 であるとする．また，放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を S とし，放物線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．

(i) 点 P の座標および接線 l の方程式を求めよ．

(ii) S の値を求めよ．

(iii) T の値を求めよ．

(iv) S と T の値の大小を調べよ．

4 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙（省略）の指定のところに記入せよ．

(1) i を虚数単位とする．$z=\sqrt{3}+i$ のとき，$\dfrac{1}{z}$ の絶対値は $\boxed{\text{(ア)}}$ であり，また，iz の偏角 θ は $\boxed{\text{(イ)}}$ である．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ 上の点 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ における接線の方程式が $y=ax+b$ であるとき，$a=\boxed{\text{(ウ)}}$，$b=\boxed{\text{(エ)}}$ である．

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta=\boxed{\text{(オ)}}$ であり，$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\boxed{\text{(カ)}}$ である．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\boxed{\text{(キ)}}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{(2x-1)(2x+1)}=\boxed{\text{(ク)}}$ である．

(5) **1**(4) と同一

5 以下の問いに答えよ．

(1) **2**(1) と同一

(2) 関数 $f(x) = |x^3 \cos x|$ が $x = 0$ で微分可能かどうかを調べよ．

(3) **2**(3) と同一

6 以下の問いに答えよ．

(1) O を原点とする座標平面上に

$$\text{点 } \mathrm{A}_n(x_n,\ y_n) \text{ および点 } \mathrm{B}_n(-y_n,\ x_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

がある．ただし，$x_1 = y_1 = 1$ とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

(i) $x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3$ の値を求めよ．

(ii) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ は $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$ が直角の直角二等辺三角形であることを証明せよ．

(iii) $r_n = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\right|$ とおくとき，r_n を n を用いて表せ．

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right|$ を求めよ．

(2) $a,\ b$ を実数とし，t を正の実数とする．関数 $y = \log x$ のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる曲線を C とする．また，C は点 $\mathrm{P}(t,\ t)$ において，直線 $y = x$ に接しているとする．曲線 C と直線 $y = x$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とし，曲線 C と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．

(i) $a,\ b$ を t を用いて表せ．

(ii) 曲線 C と x 軸の交点の x 座標を t を用いて表せ．

(iii) (a) A を実数とするとき，不定積分 $\displaystyle\int \log(x + A)\,dx$ を求めよ．

(b) T を t を用いて表せ．

(iv) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{S}{T^2}$ を求めよ．