旭川医科大学

2025 年度　前期日程　数学

1 次の媒介変数表示をもつ曲線 C を考える．媒介変数 t は実数全体を動くとする．

$$x = f(t) = e^t - e^{-t}, \quad y = g(t) = e^t + e^{-t}.$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x,\ y$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

(2) C 上の点 $(x,\ y)$ に対して，y を x を用いて表せ．

(3) 座標平面の原点を O とし，$T > 0$ に対して，$a = f(T),\ b = g(T)$ とおき，C 上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる．$0 \leqq x \leqq a$ における C の部分と y 軸および線分 OP によって囲まれる図形を D とする．D の面積 S を T を用いて表せ．

(4) (3) で定めた b, D について，D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を b を用いて表せ．

2 次の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c$ は実数で $a > 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ b \neq c$ とする．座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ 0,\ b)$, $\mathrm{Q}(0,\ a,\ c)$ を結ぶ線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面と 2 つの平面 $z = b$ および平面 $z = c$ で囲まれる立体 K の体積を求めよ．

(2) t は実数で $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2},\ t \neq \dfrac{\pi}{4}$ とする．

$$a = t, \quad b = \sin t, \quad c = \cos t$$

として (1) の立体 K の体積を $V(t)$ で表すことにする．

(i)　$0 < t < \dfrac{\pi}{2},\ t \neq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で $V(t)$ が極大となる点はただ 1 つ存在することを示せ．

(ii)　(i) の極大となる点を t_0 とするとき，

$$\frac{\pi}{6} < t_0 < \frac{\pi}{4}, \quad V(t_0) < \frac{1}{10} V\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つことを示せ．必要ならば，$3.14 < \pi < 3.15,\ 1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ を用いてよい．

3 外接円の半径が 1 である △ABC において，$\angle BAC = 60°$，$\angle ABC = 45°$ とする．$\angle BAC$ の二等分線と，辺 BC との交点を D，△ABC の外接円との交点を P とする．また，点 P から直線 AC 上に $\angle BDP = \angle CLP$ となる点 L をとる．さらに直線 LD と辺 AB との交点を M とし，直線 LM と直線 CP の交点を N とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 BD，線分 CD の長さをそれぞれ求めよ．

(2) $\angle CLP$, $\angle BDM$ をそれぞれ求めよ．

(3) 四角形 MBPN と四角形 AMNC の面積の比を求めよ．

4 n を正の整数とする．赤玉と白玉がそれぞれ n 個ずつ入った 1 つの袋から 1 個の玉を取り出す操作を考える．取り出した玉はもとに戻さず，袋の中が空になるまでこの操作を繰り返す．$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$ として，i 回の操作後に取り出した赤玉と白玉の個数をそれぞれ $r_i,\ w_i$ とする．また，次の条件を満たす場合の数を a_n とする．

$$\text{すべての } i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n \text{ に対して}, r_i \geqq w_i.$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ．

(2) a_n を求めよ．

(3) ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ を二項係数とするとき，$\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqq \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ を示せ．

(4) N を正の整数とするとき，$\dfrac{N}{2(N+1)} \leqq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{a_n}{4^n\sqrt{n}} \leqq \dfrac{N}{\sqrt{2}(N+1)}$ を示せ．