金沢大学

2018 年度　前期日程　数学

1 1 個のサイコロを 4 回続けて投げて出た目の数を順に a, b, c, d とおき，2 直線 l_1, l_2 を

$$l_1 : y = ax + b, \qquad l_2 : y = cx + d$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1)　l_1 と l_2 が一致する確率を求めよ．

(2)　l_1 と l_2 が 1 点で交わる確率を求めよ．

(3)　l_1 と l_2 が 1 点で交わり，その交点の x 座標，y 座標がともに整数となる確率を求めよ．

2 a, k を定数とし，曲線 $C_1 : y = e^x$ および曲線 $C_2 : y = k\sqrt{x - a}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　2 つの曲線 C_1, C_2 が共有点をもつための，a, k が満たすべき条件を求めよ．

以下，2 つの曲線 C_1, C_2 が共有点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ において同一の直線 l に接しているとする．

(2)　a と k を t を用いて表せ．

(3)　直線 l が原点を通るとする．このとき，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

3 a, b, c を正の数とする．楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ が，4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする．4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S，楕円 C で囲まれた図形の面積を T とする．このとき，不等式

$$\frac{S}{T} \leqq \frac{2}{\pi}$$

が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ．

4 座標空間において，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ と点 $(1,\ 1,\ -3)$ を通る直線を l，2 つの点 $(-6,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 2,\ 1)$ を通る直線を m とする．直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q を，直線 PQ が直線 l，m のいずれにも直交するようにとる．次の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を求めよ．

(2) A を直線 l 上の点，B を直線 m 上の点とする．ただし，$\mathrm{A} \neq \mathrm{P}$ とする．このとき，$\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(3) 直線 l 上の 2 点 A，C をそれらの中点が P となるようにとる．同様に，直線 m 上の 2 点 B，D をそれらの中点が Q となるようにとる．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = a$，$|\overrightarrow{\mathrm{QB}}| = b$ のとき，三角形 BDP の面積と四面体 ABCD の体積を求めよ．