金沢大学

2019 年度　前期日程　数学

1 k を正の定数とする．2 次方程式 $z^2 - 2kz + 1 = 0$ が虚数解をもつとし，虚部が正の虚数解を α とする．次の問いに答えよ．

(1)　k の値の範囲を求めよ．また，$|\alpha|$ を求めよ．

(2)　$\cos\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ．

(3)　複素数平面において，α^3 が第 3 象限にあり，かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ．ただし，座標軸の点は，どの象限にも属さない．

(4)　(3) において求めた範囲に α があるとき，$|1 - \alpha^5|$ の値の範囲を求めよ．

2 座標平面に 2 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x} - 4$ $(x > 0)$ と $C_2 : y = -\sqrt{1 - x}$ $(x < 1)$ がある．次の問いに答えよ．

(1)　C_1 は区間 $x > 0$ で上に凸であることを示せ．

(2)　点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ に関して，点 P と対称な点を Q とする．点 P が C_1 上を動くとき，点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ．

(3)　C_1 上の点 A における法線 l が点 F を通るとし，l と C_2 の共有点を B とする．このとき，A の座標 $(x_1,\ y_1)$ および B の座標 $(x_2,\ y_2)$ をそれぞれ求めよ．

(4)　C_1 上に点 $\mathrm{X_1}$，C_2 上に点 $\mathrm{X_2}$ をとる．線分 $\mathrm{X_1X_2}$ の長さの最小値を求めよ．

3 座標平面において，

$$x = \sin t, \quad y = \cos t - \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C_1 とし，x 軸に関して C_1 と対称な曲線を C_2 とする．C_1 で囲まれる図形と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S を求めよ．

4 p を 2 より大きい素数，n を正の整数とする．$1 \leqq k \leqq p^n$ を満たす整数 k で，p と互いに素であるもの全体の集合を A とする．次の問いに答えよ．

(1) $p = 3,\ n = 2$ のとき，集合 A を求めよ．

(2) A に属する整数の個数，および A に属するすべての整数の和を求めよ．

(3) A に属する整数 k に対して，$kl - 1$ が p^n の倍数となるような A に属する整数 l が存在し，それはただ一つであることを示せ．ただし，整数 a と b が互いに素であるとき，1 次不定方程式 $ax + by = 1$ は，整数解をもつことが知られている．必要ならばこの事実を利用してよい．

(4) A に属するすべての整数 k についての $\dfrac{1}{k}$ の和を既約分数で表したとき，分子は p^n の倍数となることを示せ．