三重大学

2021 年度　前期日程　数学

（120 分）

1 以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -3,\ -1)$ に対して，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。さらに $\vec{a}$ と直交し，$\vec{b}$ とも直交するベクトルで，長さが $\sqrt{3}$ のものをすべて求めよ。

(2) 関数 $y=\sin 2x-\sin x-\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。ただし，最大値および最小値を与える x の値は求めなくてよい。

(3) 虚部が正で $|z|=\sqrt{3}$ となる複素数 z に対して，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$，$\mathrm{C}(z^3)$ を考える。$\angle\mathrm{BAC}$ が直角となるとき，z を求めよ。

(4) a，b，c が正の数であるとき，$\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\left(\dfrac{b}{c}+1\right)\left(\dfrac{c}{a}+1\right)$ の最小値を求めよ。またそのときの a，b，c の条件を求めよ。

(5) 4 の倍数 4，8，12，$\cdots$，200 がひとつずつ書いてある赤玉 50 個が入っている袋と，自然数 1，2，3，$\cdots$，100 がひとつずつ書いてある白玉 100 個が入っている袋がある。それぞれの袋から玉を 1 個ずつとり出すとき，赤玉に書いてある数が白玉に書いてある数より大きくなる確率を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$，$a_2 = 1$ を満たすとする。また，数列 $\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の階差数列とする。0 以上の実数 t があって，$\{b_n\}$ の階差数列が $\{ta_n\}$ になっているとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t = 0$ のとき，および $t = 1$ のとき，$a_n\,(n \geqq 3)$ を n で表せ。

(2) $t \neq 0$, $t \neq 1$ とする。変数 x, y, z に対して，条件 $x-2y+(1-t)z = 0$ と条件 $x-\alpha y = \beta(y-\alpha z)$ が同値であるような実数の組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求め，それぞれを t を用いて表せ。

(3) $t \neq 0$，$t \neq 1$ とする。$a_n\,(n \geqq 3)$ を t と n を用いて表せ。

3 正の定数 p と平面上の点 $(x,\ y)$ に対して，次のようにおく。

$$f = (2p - xy)\int_0^{p\pi} \cos\frac{t}{2p}\,dt + \int_0^1 te^t\,dt$$
$$u = px - y$$

また平面上の曲線 C を次の方程式で定める。

$$C\colon p^2x^2 + y^2 - 1 = 0$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) f を x，y，p を用いて表せ。

(2) C 上で u がとる値の範囲を求めよ。

(3) C 上で $\dfrac{u}{f}$ がとる値の範囲を求めよ。