三重大学

2022 年度　前期日程　数学

（120 分）

1 以下の問いに答えよ。

(1) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3{a_n}^5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。この数列の一般項を求めよ。

(2) a，b を正の実数とする。$a \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2 b}$ が成り立つ x の範囲を求めよ。

(3) $\cos(x+y) - \cos x + \cos(x-y) = 0$ $\left(0 < x < \pi,\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす $(x,\ y)$ 全体を xy 平面上に図示せよ。

(4) α を正の実数，β を複素数とする。複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形の面積が 1 で，α と β が $5\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとき，α と β の値を求めよ。

(5) 袋 A には赤球 3 個と白球 2 個，袋 B には赤球 5 個と白球 3 個が入っている。袋 A から球を 1 個取り出して，色を確認せずに袋 B に入れ，中身をよくかき混ぜた後，袋 B から球を 1 個取り出す。袋 B から取り出した球が白球であるとき，袋 A から取り出した球も白球であった確率を求めよ。

2 実数 s に対して平面ベクトル $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{b_2}$ を，成分を用いて

$$\overrightarrow{a_1} = (x_1,\ y_1) + s(2,\ 1), \qquad \overrightarrow{b_1} = (-3,\ -1) + s(-2,\ -1),$$
$$\overrightarrow{a_2} = (x_2,\ y_2) + s(0,\ 1), \qquad \overrightarrow{b_2} = (1,\ -3) + s(1,\ -2)$$

と定める。ただし x_1，y_1，x_2，y_2 は s によらない定数で，内積について

$$\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2} = 10 + 7s, \quad \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_1} = -12 - 7s - s^2$$

がすべての s に対して成り立っているとする。実数 t に対して

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{a_1} + t\overrightarrow{b_1}, \quad \overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{a_2} + t\overrightarrow{b_2}$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) x_1，y_1，x_2，y_2 を求めよ。

(2) $\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}$ を s を用いて表せ。また $\overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2}$ を求めよ。さらに $\overrightarrow{c_1}$ と $\overrightarrow{c_2}$ が垂直になるとき，t を s で表せ。

(3) s を正の実数とする。$\overrightarrow{c_1}$ と $\overrightarrow{c_2}$ のすべての成分が整数であり，$\overrightarrow{c_1}$ と $\overrightarrow{c_2}$ が垂直になるとき，s の値をすべて求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の自然数 n に対し $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1} e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}}\, dx$ を求めよ。

(2) $x > 0$ とする。$\log x \leqq \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$ を示せ。さらにこの不等式を用いて

$$(n-3)\log x - \frac{n-1}{n}x^n + x^2 - \frac{1}{n} \leqq 0 \quad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

を示せ。

(3) $x > 0$ のとき $x^{n-1} e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} \leqq x^2 e^{-x^2}$ $(n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を示せ。さらにこの不等式を用いて $e^{-\frac{1}{3}} \leqq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ を示せ。