三重大学

2024 年度　前期日程　数学

（120 分）

1 以下の問いに答えよ。

(1) 1 枚のコインを 6 回投げるとき，表が 3 回以上出る確率を求めよ。

(2) $\sqrt{11}$ が無理数であることを用いて $p\sqrt{11}=q$ となる有理数 p，q は $p=0$，$q=0$ であることを示せ。さらに $\sqrt{11}$ の小数部分を x と表すとき，$x^2=ax+\dfrac{b}{x}$ を満たす有理数 a，b を求めよ。

(3) 正の数 a，x，y，z について，$2xy-yz-zx=0$ かつ $2^x=3^y=a^z$ であるとき，a の値を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=0$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる定数 p，q を求め，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(5) 複素数 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ について，集合 $S=\left\{\dfrac{\alpha^m-\overline{\alpha}^{\,m}}{\alpha-\overline{\alpha}}\ \middle|\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\right\}$ を考える。ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数である。S の要素の個数を答え，その要素をすべて列挙せよ。

2 平面上に 3 点 O，A，B があり，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を P，線分 AB を 2 : 1 に内分する点を Q とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=5$ として以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で表せ。同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\leqq 9$ を示せ。

(3) 整数 a，b，c に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,c)$ が成り立つとする。このとき，a，b，c のとり得る値をすべて求めよ。ただし a，c は 0 以上とする。

3 次の媒介変数表示で表される曲線 C（サイクロイド）について考える。

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta$$

以下の問いに答えよ。

(1) α を $0 < \alpha \leqq \pi$ を満たす実数とする。曲線 C 上の点 $(\alpha - \sin\alpha, 1 - \cos\alpha)$ における接線 l の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線 l と x 軸, y 軸, 直線 $x = \pi$ で囲まれた図形の面積を $S(\alpha)$ とする。$\lim_{\alpha \to +0} \alpha S(\alpha)$ を求めよ。

(3) 曲線 C，x 軸，直線 $x = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。