三重大学

2025 年度　前期日程　数学

（120 分）

1 以下の問いに答えよ。

(1) 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円の周上に, 3 点 A, B, C があり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ を満たすとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

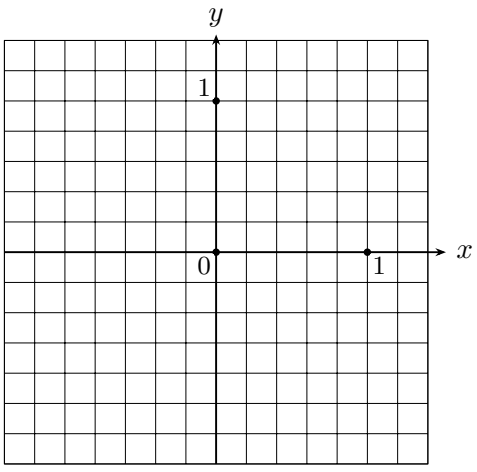
(2) $\tan\dfrac{\pi}{10}\tan\dfrac{2}{5}\pi=1$ を示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3^n+2a_n$ であるとする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $y=a_1x+b_1$ を，2 点 $(1,0)$ および $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線の方程式として，$y=a_2x+b_2$ を，2 点 $(-1,0)$ および $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る直線の方程式とする。連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 1 \\ y\leqq a_1x+b_1 \\ y\geqq a_2x+b_2 \end{cases}$$

の表す領域を図示せよ。また，点 (x,y) がこの領域を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。



（解答欄）

(5) $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$ かつ $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 1$ を満たす組 (θ_1, θ_2) をすべて求めよ。ただし，$0 \leqq \theta_1 \leqq \theta_2 < 2\pi$ とする。また，複素数 z_1，z_2 で $|z_1|+|z_2| = 5$，$|z_1 z_2| = 6$，$z_1|z_2| - |z_1|z_2 = |z_1 z_2|\, i$ を満たす組 (z_1, z_2) をすべて求めよ。ただし，$|z_1| \leqq |z_2|$，$0 \leqq \arg z_1 \leqq \arg z_2 < 2\pi$ とする。

2 k 本中 1 本が当たりで残りがはずれの公平なくじがある。このくじを引いて戻す試行を n 回繰り返す。

(1) 「n 回中当たりを 1 回以上引く確率が a 以上である」という条件を，k，n，a を使った不等式で表せ。さらに，$k = 3$，$n = 2$，$a = \dfrac{5}{9}$ のとき，その不等式が成り立つことを示せ。

(2) (1) の不等式を n について解け。ただし，$k > 1$ かつ $0 \leqq a < 1$ とする。

(3) くじの本数 k が 5 で，a が 0.99 のとき，(1) の不等式を満たすくじ引きの回数 n の最小値を求めよ。ただし，$\log_5 2$ の近似値として 0.43 を使ってよい。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-(x+1)^2} & (-1 \leqq x < 0) \\ 1 - \sqrt{1-(x-1)^2} & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

とする。曲線 $y = f(x)$ $(-1 \leqq x < 0)$ の凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2) 不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ の表す空間内の球を B，連立不等式

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leqq \{f(x)\}^2 \\ x \geqq -1 \\ x \leqq 1 \end{cases}$$

の表す空間内の立体を D とする。ただし，$f(x)$ は (1) で与えられるものである。(x, y, z) が D の点ならば，それは B の点でもあることを示せ。

(3) B，D は (2) で与えられたものとする。B から D の内部を取り除いてできる立体の体積を求めよ。