三重大学

2021 年度　前期日程　物理

（2 科目　150 分）

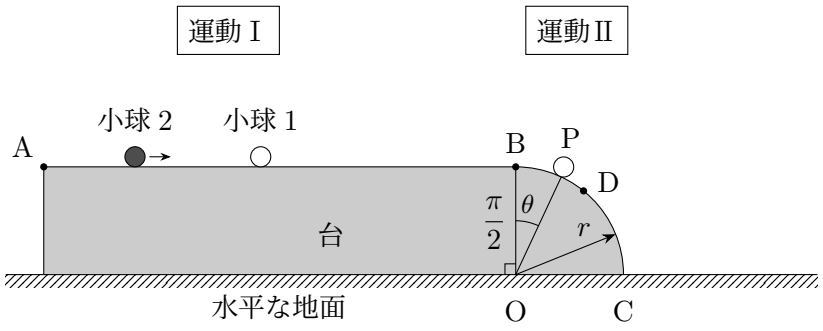
1 以下の文章中の［（ア）］～［（キ）］に適切な数式を書き入れなさい。ただし，［（イ）］には不等式を書き入れなさい。

図のように，水平面 AB と曲面 BC がなめらかにつながっている台を水平な地面の上に固定した。ただし，曲面 BC は点 O を中心とする半径 r〔m〕の円弧状であり，OB と OC のなす角度は $\frac{\pi}{2}$ rad であるとする。なお，π は円周率である。

以下では，小球が水平面 AB 上や曲面 BC 上をすべる運動を考える。ただし，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。小球の大きさは無視する。また，水平面 AB および曲面 BC と小球の間には摩擦がなく，空気の抵抗もないとする。

運動Ⅰ：　まず，点 A から点 B に至る途中の位置に質量 m〔kg〕の小球 1 を置き，静止させた。次に，質量 M〔kg〕の小球 2 を点 A に置き，水平面 AB 上を図中の右側にむかってすべらせ，静止している小球 1 に衝突させた。小球 2 に衝突された小球 1 はすべり出し，衝突直後の小球 1 の速さは v〔m/s〕となった。ただし，小球 1 と小球 2 の衝突における反発係数（はね返り係数）は 1 とする。

運動Ⅱ：　小球 1 は運動Ⅰの過程での衝突によりすべり出し，点 B に至るまでの速さは v のままで一定であった。その後，曲面 BC 上のある点 D まで小球 1 は点 O を中心とする半径 r の円運動をおこなったが，点 D からは台を離れて，空中に飛び出した。



図

問 1　運動 I の過程において，衝突直後の小球 1 の速さは v であるために，衝突直後の小球 2 の速さは (ア)〔m/s〕であり，M と m の間に (イ) の関係がある場合には，小球 2 は台に対して左側にはね返される。また，小球 2 が点 A からすべり始めたときの速さは (ウ)〔m/s〕である。

問 2　運動 II の過程において，曲面 BC 上で小球 1 が円運動をおこなっているときの位置を点 P とする。ただし，点 P は点 D より高い位置にあり，OB と OP のなす角度を θ〔rad〕とする。このときの小球 1 の速さは (エ)〔m/s〕であるため，小球 1 は曲面 BC から (オ)〔N〕の大きさの垂直抗力を受けている。これより，点 D の地面からの高さが (カ)〔m〕であると求められる。また，v が (キ)〔m/s〕よりも小さいために小球 1 は曲面 BC 上の一部分で円運動をおこなったが，もし v がこの値よりも大きかったとすれば，小球 1 は点 B において台を離れて，空中に飛び出していた。

2 以下の文章中の (i) 〜 (xi) に適切な数式を書き入れなさい。ただし，(vii) には等式を書き入れなさい。なお，□ には対応する □ での解答と同じ数式が入るものとする。また，円周率は π を用いることとする。

ロケットから打ち出された宇宙探査機の万有引力による運動を考える。ただし，地球と宇宙探査機の間の万有引力以外の力はすべて無視する。宇宙探査機を質量 m〔kg〕の質点とみなす。地球を密度が一様な質量 M〔kg〕の球とみなし，中心を点 O とする。このような条件では，地球のまわりを公転する宇宙探査機の運動において，惑星の運動におけるケプラーの法則と同様の法則が成り立つ。すなわち，

第 1 法則　「宇宙探査機は地球のまわりに，点 O を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く」

第 2 法則　「宇宙探査機と点 O を結ぶ線分が一定時間に描く面積は一定である（面積速度一定の法則）」

第 3 法則　「宇宙探査機の公転周期の 2 乗は，楕円軌道の半長軸（長半径）の 3 乗に比例する」

となる。

宇宙探査機を載せたロケットを地表から打ち上げ，地表の上空においてロケットから宇宙探査機を打ち出した。そのときの宇宙探査機の位置を点 P とし，図 1 に示す。ただし，図中には地球と宇宙探査機のみが示され，ロケットは省略されている。

点 P と点 O の距離は r〔m〕である。また，点 P における宇宙探査機の地球に対する速度と OP は直交する。ただし，宇宙探査機の速さに関しては以下の問いにおいていくつかの場合を考える。なお，万有引力定数は G〔N·m^2/kg^2〕とする。

また，万有引力による位置エネルギーにおいて，無限に遠い点での位置エネルギーを 0 とする。

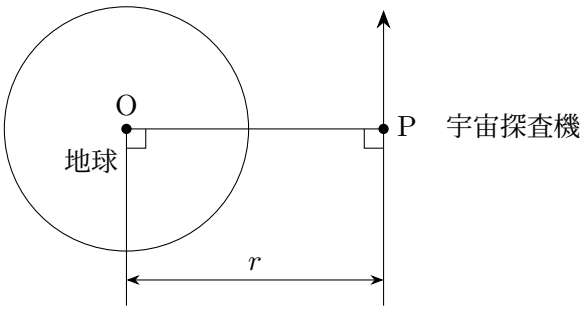


図 1

問 1　ロケットから打ち出された速さが v_1〔m/s〕であったとき，宇宙探査機は点 O を中心とする半径 r の円軌道上を等速円運動したとする。このときに宇宙探査機に作用する向心力の大きさを m，r，v_1 で表すと，(i)〔N〕である。一方，地球と宇宙探査機の間の万有引力の大きさを m，M，r，G で表すと，(ii)〔N〕である。したがって，この場合では v_1 が (iii)〔m/s〕となり，円運動の周期を M，r，G で表すと (iv)〔s〕となる。

問 2　宇宙探査機が地球の引力から脱することができる速さを考える。ロケットから打ち出されたときの宇宙探査機と点 O の距離は r であるため，このときの万有引力による位置エネルギーは (v)〔J〕である。したがって，宇宙探査機を点 P から無限の遠方にまで送ることができる最小の速さを v_2〔m/s〕とすると，v_2 は (vi)〔m/s〕となる。

問 3　問 1 で求めた v_1 と問 2 で求めた v_2 に対して，点 P における宇宙探査機の速さ v〔m/s〕が $v_1 < v < v_2$ である場合，図 2 に示すように，宇宙探査機は点 O を焦点とする楕円軌道を描く。

PO を延長した直線と楕円の交点を Q とし，点 Q と点 O の距離を R〔m〕とする。また，点 Q における宇宙探査機の速さを V〔m/s〕とする。

まず，宇宙探査機が点 P と点 Q それぞれにある場合に対して，面積速度一定の法則を適用すると，r，v，R，V の間に

(vii)　……　式 (1)

の関係が成り立つ。次に，点 P における宇宙探査機の運動エネルギーと位置エネルギーの和を m，M，r，v，G で表すと (viii)〔J〕であり，点 Q における宇宙探査機の運動エネルギーと位置エネルギーの和を m，M，R，V，G で表すと (ix)〔J〕であるため，力学的エネルギー保存の法則を適用すると，

(viii) = (ix)　……　式 (2)

の関係があることがわかる。

したがって，式 (1) と式 (2) からを R を消去して，V を

$$V = \boxed{\text{(x)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式 (3)}$$

のように M，v，r，G を用いて表すことができる。さらに式 (3) を式 (1) に代入すれば，R も

$$R = \boxed{\text{(xi)}}$$

のように M，v，r，G を用いて表すことができる。

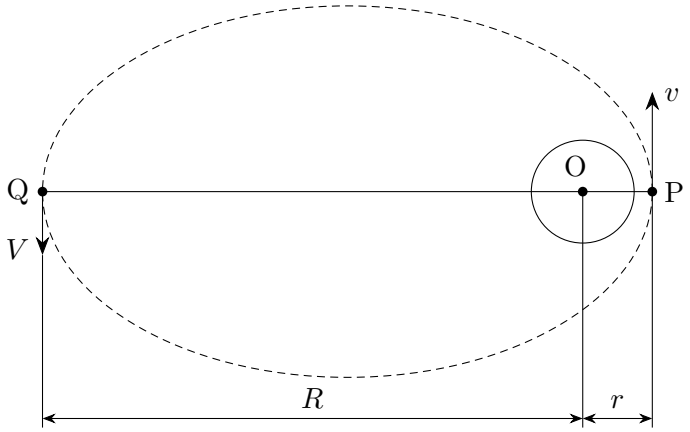
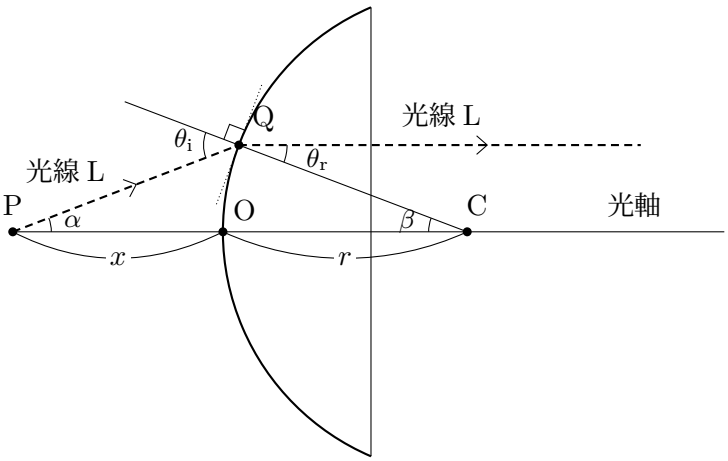


図 2

3 次の文を読み，以下の問いに答えなさい。

真空中に置かれた薄い平凸レンズにおいて，図のように，左側（凸面側）が半径 r〔m〕の球面であり，右側が平面であるような場合を考える。球面の中心は光軸上に存在し，点 C とする。また，球面と光軸との交点をレンズの中心点 O に定める。

光軸上の点 P から光線 L が発せられた。ただし，点 P はレンズの左側（凸面側）にあり，点 O と点 P の距離を x〔m〕とする。光線 L がレンズの球面上の点 Q に入射角 θ_{i}〔rad〕で入射し，屈折角 θ_{r}〔rad〕で屈折した。これにより進む方向が変わり，光線 L が光軸と平行となるように進んだとする。ただし，点 Q は点 O ではない。



図

問 1　レンズのガラスの屈折率（絶対屈折率）を n とする。n を θ_{i}，θ_{r} で表しなさい。

問 2　PO と PQ のなす角度を α〔rad〕とし，CO と CQ のなす角度を β〔rad〕とする。θ_{i} と θ_{r} を α，β で表しなさい。

問 3　点 Q が光軸の近くにある場合，PQ は光軸とほぼ平行となる。したがって，α と β は非常に小さくなり，問 2 の結果より θ_{i} と θ_{r} も非常に小さくなる。また，$\mathrm{PO} = x$，$\mathrm{CO} = r$ であり，PC と OQ がほぼ直交することに着目すると，α と β に関して

$$\tan\alpha \fallingdotseq \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{OQ}}{x}$$
$$\tan\beta \fallingdotseq \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{CO}} = \frac{\mathrm{OQ}}{r}$$

となり，これらの式から OQ を消去して，x は α，β により

$$x \fallingdotseq \frac{r\tan\beta}{\tan\alpha}$$

のように表される。

そのことを踏まえ，問 1 と問 2 で得た結果を使って，x を r，n で表しなさい。ただし，微小角度 δ〔rad〕に対して成り立つ近似式 $\sin\delta \fallingdotseq \delta$，$\tan\delta \fallingdotseq \delta$ を用いてよい。

4 以下の文章中の (あ) ～ (き) には適切な数式を書き入れなさい。なお, [ ] には対応する [ ] での解答と同じ数式が入るものとする。

長さ L〔m〕の伸び縮みしない棒の両端にピストン A とピストン B を固定する。図 1 のように，それを長さが $3L$ で断面積が S〔m^2〕のシリンダーの中にはめ込む。ただし，2 つのピストン，棒，シリンダーは断熱材で作られている。

シリンダーの内部は 3 つの空間に分けられ，左から空間 1，空間 2，空間 3 と呼ぶことにする。空間 2 は真空であるが，空間 1 と空間 3 にはそれぞれ n〔mol〕の単原子分子理想気体を封じ込めた。ただし，シリンダーの両端は断熱材で作られたふたで閉じられている。また，空間 1 の気体を加熱するために，左側のふたにはヒーターが取り付けられている。

ピストン A，ピストン B，シリンダー，ふたにおいて，厚さや熱容量は無視できるものとする。棒とヒーターにおいて，体積や熱容量は無視できるものとする。また，以下の問 2 までは，ピストン A とピストン B はシリンダーの内壁に対してなめらかに移動するが，空間どうしの間の気密は保たれるとする。一方，問 3 では，ピストンの劣化や割れに伴う熱やエネルギーを考えないことにする。ただし，以下の問 1 から問 3 では気体定数を R〔J/(mol·K)〕とせよ。

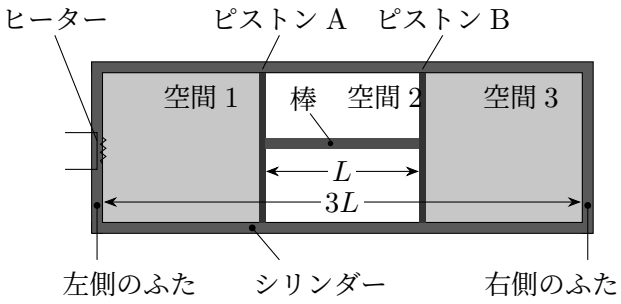


図 1

問 1　最初に，空間 1 と空間 3 の気体の温度がともに T_0〔K〕であったとすると，空間 1 と空間 3 の気体の圧力は (あ) 〔Pa〕で同じとなる。

問 2　問 1 の状態に対して，空間 1 の気体をヒーターで加熱すると，ピストンが右側にゆっくりと移動した。図 2 のように，加熱を止めてから十分に時間が経過すると，ピストン B とシリンダーの右側のふたの距離が L'〔m〕になったとする。

単原子分子理想気体の断熱変化では（圧力）×（体積）$^{\frac{5}{3}}$ = 一定となることが知られている。した

がって，空間 3 の気体の圧力は加熱前には (あ) であったが，加熱後には (い) 〔Pa〕となる。空間 3 の気体の温度は加熱前には T_0 であったが，加熱後には (う) 〔K〕となる。また，加熱後の空間 1 の体積は (え) 〔m^3〕であるため，空間 1 の気体の温度は (お) 〔K〕となる。

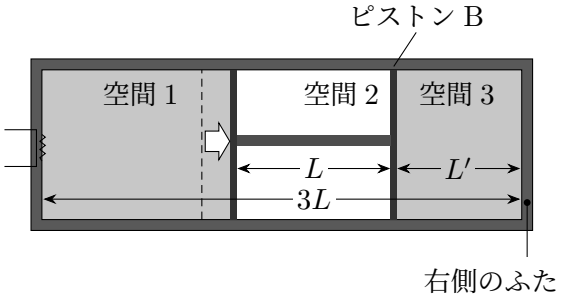


図 2

問 3　問 2 の最終の状態からしばらくすると，空間 1 の気体を加熱した影響によりピストン A を構成する断熱材が劣化を始め，やがてシリンダーの内壁に固着してピストンがシリンダーに対して動かなくなった。その後さらに，図 3 のように，ピストン A に割れが発生することで空間 1 と空間 2 の間の気密が破れた。その割れから空間 1 の気体が空間 2 に漏れ出したが，固着によりピストン B とシリンダーの右側のふたの距離は L' のままで変わらなかった。このため，ピストン A に割れが発生してから十分に時間が経過した後に，空間 1 と空間 2 の気体の圧力は (か) 〔Pa〕で同じとなった。

その後，図 4 のように，ピストン B にまで割れが発生し，空間 2 と空間 3 の間の気密も破れた。十分に時間が経過した後に，至る所でシリンダー内の気体の温度は (き) 〔K〕で一様となった。

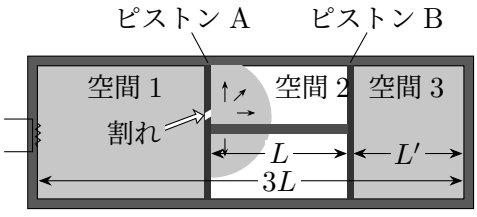


図 3

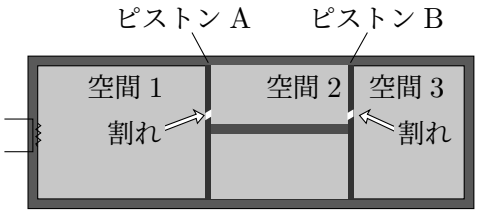


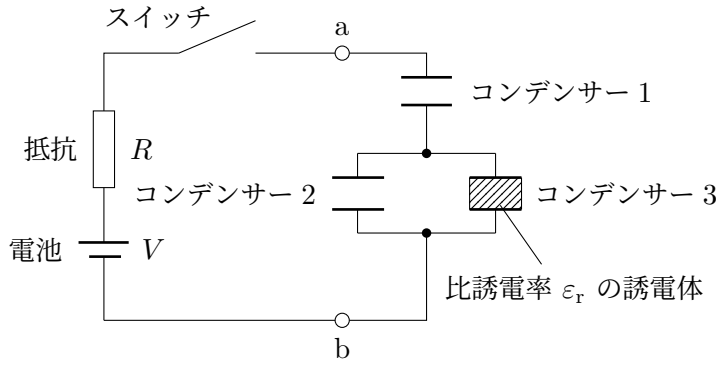
図 4

5 以下の文章中の［①］～［⑩］に適切な数式や数値を書き入れなさい。

図のように，抵抗値 R〔Ω〕の抵抗，3 つの平行板コンデンサー，起電力 V〔V〕の電池，およびスイッチが接続された回路がある。ただし，電池の内部抵抗と導線の抵抗は無視できるものとする。

3 つの平行板コンデンサーは端子 ab 間で図中に示されるように接続されている。3 つの平行板コンデンサーの極板の面積はすべて S〔m^2〕，極板間の距離はすべて d〔m〕である。3 つの平行板コンデンサーのうち，コンデンサー 1 とコンデンサー 2 の極板間は真空であり，真空の誘電率は ε_0〔F/m〕である。コンデンサー 3 の極板間は挿入された誘電体で完全に満たされている。ただし，この誘電体の比誘電率は ε_r である。

最初，スイッチは開いており，3 つの平行板コンデンサーは充電されていないとする。



図

問 1　3 つのコンデンサーの電気容量はそれぞれ，コンデンサー 1 とコンデンサー 2 において［①］〔F〕，コンデンサー 3 において［②］〔F〕であるため，コンデンサー 2 とコンデンサー 3 からなる並列部分の合成容量は［③］〔F〕で，端子 ab 間の合成容量は［④］〔F〕である。

問 2　スイッチを閉じて，十分に時間が経過したときの，抵抗に流れる電流値は［⑤］〔A〕である。このとき，コンデンサー 1 の極板間の電圧は［⑥］〔V〕であるため，コンデンサー 1 に蓄えられる電気量は［⑦］〔C〕，コンデンサー 3 に蓄えられる電気量は［⑧］〔C〕である。

問 3　スイッチを閉じてから，十分に時間が経過するまでに，電池が回路に対してした仕事の総量は［⑨］〔J〕である。そのうち，3 つのコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの和は［⑩］〔J〕で，残りは抵抗におけるジュール熱として消費された。