奈良県立医科大学

2025 年度　後期日程　数学

（120 分）

1 関数 $w(x) = \sin \pi x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ に対して，数列 $\{c_n\}$ $(n \geqq 0)$ を次のように定める：

$$c_n = \int_0^1 x^n w(x)\, dx.$$

(1) 極限値 $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ のとき c_n を c_{n-2} の一次式として表示せよ.

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} n^2 c_n$ を求めよ.

2 x に関する整数係数の二つの整式 $F(x), G(x)$ に対して関係式

$$F(x) \equiv G(x) \pmod 2$$

が成り立つとは，等式 $F(x) - G(x) = 2H(x)$ を満たすような整数係数の整式 $H(x)$ が存在することである.

(1) 任意の正整数 m について関係式

$$(1+x)^{2^m} \equiv 1 + x^{2^m} \pmod 2$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 1 より大きい正整数 n を次のように二進数表示する：

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_r}$$

（ただし，各整数 $a_1, \cdots, a_r$ は $0 \leqq a_r < a_{r-1} < \cdots < a_1$ をみたす.）このとき関係式

$$(1+x)^n \equiv \left(1 + x^{2^{a_1}}\right)\left(1 + x^{2^{a_2}}\right) \cdots \left(1 + x^{2^{a_r}}\right) \pmod 2$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) $n > 1$ を正整数とする．$(n+1)$ 個の二項係数 ${}_n\mathrm{C}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ のうち奇数であるものの個数を r を用いて表示せよ（ただし，理由も述べよ）.

3 k を正の実数定数とする．実数 a, b, c は条件

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a + b + c = k$$

を満たしながら動くものとする．xyz 空間の 3 点 $\mathrm{A}\,(a, 0, 0)$，$\mathrm{B}\,(0, b, 0)$，$\mathrm{C}\,(0, 0, c)$ を通る平面を $H(a, b, c)$ とおく．

(1) 平面 $H(a, b, c)$ と原点 $\mathrm{O}\,(0, 0, 0)$ との距離 $d(a, b, c)$ を求めよ．

(2) $d(a, b, c)$ が最大となるような a, b, c および $d(a, b, c)$ の最大値を求めよ．ただし，以下の‘コーシー・シュワルツ不等式’は証明ぬきで用いてよい：

$$(\spadesuit)\quad (p^2 + q^2 + r^2)(u^2 + v^2 + w^2) \geqq (pu + qv + rw)^2$$

が任意の実数 p, q, r, u, v, w に対して成り立つ．

4 a, b は正の有理数であり，次の条件を満たすものとする：

$$a < b,\ \text{かつ}\ a^b = b^a.$$

(1) 正の有理数 θ を $b = a(1 + \theta)$ と定める．このとき $a^\theta = 1 + \theta$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $a = \frac{p}{q}$（p, q は互いに素な正整数），$\theta = \frac{r}{s}$（r, s は互いに素な正整数）とおく．このとき，$p^r = (r + s)^s$，$q^r = s^s$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 正整数 u, v を用いて $p = u^s$，$r + s = u^r$，かつ $q = v^s$，$s = v^r$ と表せることを証明せよ．

(4) $r = 1$ であり，$a = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$，$b = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}$ と表せることを証明せよ．