奈良県立医科大学

2026 年度　後期日程　数学

（120 分）

1 以下の問いに答えよ．

(1) 実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &\geqq 3, \\ a_5 &\geqq \frac{3}{2}a_1, \\ a_4+a_5 &\geqq \frac{1}{2}a_1+a_2 \end{aligned}$$

を満たすとき，$a_1+3a_2+5a_3+7a_4+9a_5$ の最小値と，それを与える $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ のうち $a_2=a_3=a_5$ であるものを求めよ．

(2) a を実数とする．積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(a\cos x-|x|)^2\,dx$ の最小値を求めよ．

(3) $\alpha=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とする．実数を係数とする 4 次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ で，α を解に持つものを 2 つ求めよ．

2 $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{5}$ なる三角形 ABC を考える．辺 AC を n 等分する $n-1$ 個の点から一つを選んで P とおき，点 A から直線 BP におろした垂線と直線 BC との交点を Q とおく．

(1) 点 Q が辺 BC 上にないとする．このとき，n として考えられる最小値を求めよ．

(2) 点 Q が辺 BC を 2 : 1 に内分するとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と線分 AP の長さを求めよ．

(3) n が 5 で割って 1 余る数のとき，以下が成り立つように P をとれることを証明せよ．

点 Q は辺 BC を内分し，辺 BC の長さは線分 QC の長さの整数倍になる．

3 実数 a に対し，xy 平面上の双曲線 $C : x^2 - y^2 = a^2$ を考える．

(1) $a = 1$ とする．実数 α, β $(\alpha > 0)$ に対し，$x = \alpha|y| + \beta$ で定まる図形を l としたとき，l と C が 4 個の共有点を持つための必要十分条件を求めよ．

(2) b, c は実数で $b > a \geqq 2$, $c > 1$ とする．C の $a \leqq x \leqq b$ の部分を C' とおくと，C' は点の集合として

$$S = \left\{ \left(\frac{a(c^t + c^{-t})}{2}, \frac{a(c^t - c^{-t})}{2} \right) \middle| |t| < \log_c b \right\}$$

の部分集合であること，すなわち C' 上の点はすべて S に属することを証明せよ．

4 $f(x)$ は実数全体で定義された連続関数で以下の条件を満たしている．

- $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$,
- すべての実数 x に対して $f(x) + f(10) = f(x + 10) + f(0)$.

また，k を整数とする．

(1) $0 \leqq x < 10$ の範囲で $f(x) = \log(x + 1)$ のとき，$10k \leqq x < 10k + 10$ の範囲では $f(x) = \log(\square)$ と書ける．空欄に入る式を求めよ．

以下では (1) の条件は忘れ，$f(0) = a$, $f(10) = b$ とする．

(2) $f(10k + 5)$ がとり得る値の範囲を求めよ．

(3) $f(5) = \dfrac{a + 3b}{4}$ とする．$k \neq 0$ に対し，$y = f(x)$ のグラフと 2 つの直線 $x = 10k$, $y = a$ で囲まれた図形の面積 A がとり得る値の範囲を求めよ．