東京女子医科大学

2022 年度　一般選抜　数学

（60 分）

※解答に際しての注意事項：答えまでの過程を記すこと。

1 座標平面に，原点 O と点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，点 $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 6$ のとき，次の問に答えよ。ただし，$p < 0 < q$ とする。

① 積 pq の値を求めよ。

② $\triangle \mathrm{OPQ}$ の面積 S を p，q を用いて表せ。

③ $\triangle \mathrm{OPQ}$ の面積 S が最小となるときの p，q の値とそのときの面積 S を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ があり，全ての n について初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とおく。次の問にそれぞれ答えよ。

① $S_n = {a_n}^2 + \dfrac{1}{2}a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

② a_n が全て正のとき，一般項 a_n を求めよ。

③ a_n の最初の 1000 項までに着目する。a_{1000} のみ負で，他は全て正とする。このとき a_{1000} を求めよ。

④ a_n の最初の 10 項までに着目する。a_1 から a_{10} までのうち，1 つは負で他は全て正とする。このとき a_{10} を求めよ。

3 1 から 8 までの値が出るルーレットを使ったすごろくを考える。ゴールはスタートから 10 マス目にあり，ちょうどゴールへ移動したときにゲームを終了する。ただし，ゴールをこえた分についてはその数だけ戻り，次の回では直接ゴールに向かう。たとえば，5 マス目の位置で 8 が出た場合，ゴールから 3 マス戻って 7 マス目へ移動し，次の回で 3 が出たらちょうどゴールとなる。なお，ルーレットは全ての値が等確率で出るものとする。スタートから始めて，ルーレットを n 回，回し終えたときにちょうどゴールしてゲームを終了する確率を p_n とおく。次の問にそれぞれ答えよ。

① p_2 を求めよ。

② p_3 を求めよ。

③ 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。

4 xy 平面上において，焦点が点 $\mathrm{F}(0,\ 1)$ であり，準線が $y=-1$ である放物線 m 上の点 $\mathrm{P}(p_x,\ p_y)$ がある。ただし，$p_x>2$ とする。点 P を中心として m の準線に接する円を円 C としたとき，円 C と点 P における放物線 m の接線との交点で原点に近い方の点を点 Q，円 C と y 軸との交点のうち焦点 F ではない点を点 A とする。また，$\angle\mathrm{FPQ}=\theta$ としたとき，以下の問に答えよ。

① 放物線 m の式を示せ。

② 扇形 PQF の面積を S_1 とする。S_1 を p_y および θ を用いて表せ。

③ 三角形 PFA の面積を S_2 とする。S_2 を p_y および θ を用いて表せ。

④ $\displaystyle\lim_{p_x\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。