東京女子医科大学

2023 年度　一般選抜　数学

（60 分）

※解答に際しての注意事項：答えまでの過程を記すこと。

1 以下の問いに答えよ。

① $23^x = 8$，$184^y = 16$ を満たす x，y がある。このとき，$\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y}$ の値を求めよ。

② 片方の面のみにアルファベットが 1 つ書かれたカードが 5 枚ある。その内訳は，A，I，O が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，Y が書かれたカードが 2 枚である。アルファベットが書かれた面を見えないようにシャッフルして重ね，上から順番にひいて円形に並べた。時計回りに「YAYOI」になる並べ方の確率を答えよ。ただし，カードの順番を維持したまま回転させて同じ並びになれば，同じ並べ方であるものとする。

2 1 年ごとの複利法の金融商品があり，年度初めの投資額に年利率 $r\,\%$ をかけた金額が利息として年度末に支払われる。複利法とは投資額に利息を繰り入れその加算額を次期の投資額とする計算法である。たとえば，年利率 $5\,\%$ の金融商品に対して，初年度初めに 1 万円を投資すると年度末には 500 円の利息が得られ投資額は 10500 円となる。2 年目初頭にさらに 1 万円を追加投資すると投資額は 20500 円となり，その $5\,\%$ が 2 年目末に利息として得られる。この金融商品に毎年度初めに a 円を追加で投資することにした。

① n 年目末の投資額を S_n とするとき，S_n を S_{n-1} および，a と r を用いて表せ。ただし $n \geqq 2$ とする。

② S_n を n の式で表せ。

③ 年利率 $3\,\%$，毎年度初めの投資額を 60 万円とするとき，10 年目末の投資額のうち利息によって得られる金額を求めよ。なお，$(1.03)^{10} \fallingdotseq 1.34$ とする。

3 平面上に三角形 ABC があり，その内部に点 D を定める。このとき，DB = a，$\angle$DBC = 10°，$\angle$DBA = 20°，$\angle$DCB = 30°，$\angle$DAB = 40° が成り立っているものとする。

① $\sin 40°$ の値を b とおいたとき，辺 AB 及び BC の長さをそれぞれ a，b を用いて表せ。

② 直線 BD 上に，AH_1 と BD が垂直になるよう点 H_1 をとる。また，直線 BD 上に，CH_2 と BD が垂直になるよう点 H_2 をとる。このとき，BH_1 及び BH_2 の長さをそれぞれ a を用いて表せ。

③ $BH_1 - BH_2$ の値を求めよ。

4 a，b を定数，e を自然対数の底として

$$f(x) = e^{-x}(a\sin x + b\cos x)$$

とする。次の問いに答えよ。

① $f'(x) = e^{-x}\sin x$ となる a，b を求めよ。

② 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

③ 自然数 n に対し，定積分 $\displaystyle S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (-1)^{n-1}e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

④ ③で求めた S_n に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。