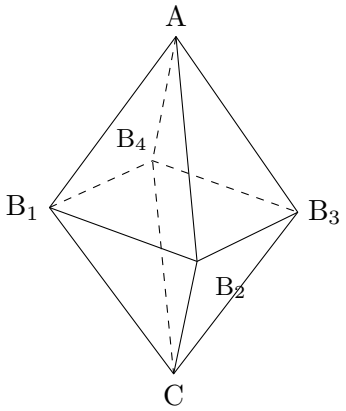
群馬大学

2026 年度　前期日程　数学

（120 分）

1 図のような正八面体 $AB_1B_2B_3B_4C$ において，頂点にいる物体 P は，1 秒を経過するごとに，その点に確率 $\dfrac{1}{5}$ で留まるか，あるいは正八面体の 1 辺をはさんで隣り合う 4 頂点のいずれかに $\dfrac{1}{5}$ の等確率で移動する。n は自然数とする。初め頂点 A にいた物体 P が n 秒後に，頂点 A にいる確率を a_n，頂点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにいる確率を b_n，頂点 C にいる確率を c_n とする。たとえば，$a_1 = \dfrac{1}{5}$，$b_1 = \dfrac{4}{5}$，$c_1 = 0$ である。以下の問に答えよ。



(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} それぞれを，a_n，b_n，c_n の中から必要なものを用いて表せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

2 以下の問に答えよ。

(1) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき，不等式 $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq (abcd)^{\frac{1}{4}}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つための a, b, c, d の必要十分条件を求めよ。

(2) 等式

$$\left(x^2+y^2+2x+2y+6+\frac{25}{x^2+y^2+1}\right)^4 = 64000\,(x+y)$$

が成り立つような正の実数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

3 複素数 α を方程式 $z^3=1$ の 1 でない解とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は各項が実数で, $(2+\alpha)^n = a_n+\alpha\, b_n$ をみたすとする。以下の問に答えよ。

(1) 実数 p, q, r, s が $p+q\alpha = r+s\alpha$ を満たすとき，$p=r$ かつ $q=s$ が成り立つことを示せ。

(2) a_3, b_3 を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の各項は整数となることを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

4 原点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A，B，C があり，$\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$ とする。点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき，H は線分 AB を 4 : 1 に内分し，$\mathrm{CH} = \dfrac{\sqrt{13}}{5}$ であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$, および $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2) s, t を実数とするとき，$|\vec{c}-s\vec{a}-t\vec{b}|^2$ を s, t の式で表せ。

(3) 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないことを示せ。

5 楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の 2 つの交点を A，B とする。ただし，点 A の x 座標は点 B の x 座標より大きいものとする。k は 0 でない定数とし，楕円 $x^2+4y^2=4$ は，直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとする。ただし，点 P の x 座標は点 Q の x 座標より大きいものとする。以下の問に答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) k が (1) で求めた範囲を動くとき，台形 ABQP の面積 S を k を用いて表せ。

(3) k が (1) で求めた範囲を動くとき，S の最大値を求めよ。