防衛医科大学校

2024 年度　学生採用試験　数学

（90 分）

マークシートの解答欄について次の注意事項に従い，マークすること。

① 解答は，マークシートの解答番号に対応した解答欄にマークすること。

② 問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{3}$ などには，数字（0 ～ 9）がそれぞれ 1 つ入る。それらを解答用紙の 1，2，3，$\cdots$ で示された解答欄にマークすること。

（例）$\boxed{1}\boxed{2}$ に 83 と解答する。

解答番号	解答欄											
	−	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨
2	⊖	⊕	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

③ 分数の形で解答する場合，それ以上約分できない形で解答すること。
例えば，$\dfrac{3}{4}$ と解答するところを，$\dfrac{6}{8}$ のように解答しないこと。

④ 小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して解答すること。

⑤ 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答すること。
例えば，$\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}$ に $4\sqrt{2}$ と解答するところを，$2\sqrt{8}$ のように解答しないこと。

⑥ 根号を含む分数の形で解答する場合，例えば，
$\dfrac{\boxed{6}+\boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}}{\boxed{9}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と解答するところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように解答しないこと。

⑦ 例えば，$\boxed{10}x^2+\boxed{11}$ に x^2+3 と解答したいときは，$\boxed{10}$ に 1 を，$\boxed{11}$ に 3 をマークすること。また，$x^{\boxed{12}}-\boxed{13}$ に $x-3$ と解答したいときは，$\boxed{12}$ に 1 を $\boxed{13}$ に 3 をマークすること。

⑧ 選択肢から選ぶ問題については，適切な解答を 1 つ選択し，マークすること。

（例） 14 と表示のある問いに対して (3) と解答する。

解答番号	解答欄											
	−	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14	⊖	⊕	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

Ⅰ から Ⅲ にある 1 から 6 については，与えられた選択肢の中から正しい選択肢を選び，その番号をマークシートにマークせよ。Ⅳ から Ⅵ にある 7 から 24 については，当てはまる数字の 0 ～ 9 を求めてマークシートにマークせよ。Ⅶ の解答は記述式の解答用紙に記載せよ。

Ⅰ 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1\colon y = x^2 + 2$，$C_2\colon y = -x^2 + ax + b$（$a$，$b$ は実数）がある。C_1 と C_2 が異なる 2 点 A，B を共有し，A，B どちらにおいても C_1 の接線と C_2 の接線が直交するとする。このとき A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，$\alpha\beta$ の値は 1 である。さらに，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積が $\sqrt{3}$ であるとき，$|ab|$ の値は 2 である。

1 の選択肢

(1) $-\dfrac{1}{4}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) 1　(4) $\dfrac{1}{4}$　(5) $\dfrac{1}{2}$

2 の選択肢

(1) $4\sqrt{2}$　(2) $4\sqrt{3}$　(3) $5\sqrt{2}$　(4) $5\sqrt{3}$　(5) $6\sqrt{2}$

Ⅱ 正の実数 x の関数 $f(x) = \log x$ がある。$y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ とする。また，$h(x) = 4x + k$ がある。ここで，k は実数の定数，$\log x$ は自然対数であり，自然対数の底を e とする。なお，$2.7 < e < 2.8$ である。また，区間 $[1,\ e]$ を I とする。

ある実数の定数 m があって，I 内の全ての x に対して $h(x) \geqq m \geqq f(x)$ が成り立っているとする。このような k のうち最小のものは 3 である。

また，I 内のある x に対して $h(x) \geqq n \geqq g(x)$ となる実数の定数 n が存在するとする。このような k のうち最小のものは 4 である。

3 の選択肢

(1) 1　(2) 0　(3) -1

(4) -2　(5) -3

4 の選択肢

(1) $4+2\log 2$　　(2) $4-2\log 2$　　(3) $4-4\log 2$

(4) $4-8\log 2$　　(5) $4-12\log 2$

III 複素平面において，原点 O ではない点 $\mathrm{P}(z_1)$ を O を中心として反時計まわりに $\dfrac{7}{6}\pi$ だけ回転し，さらに，実軸の正の方向に 2 だけ平行移動した点を $\mathrm{Q}(z_2)$ とする。$z_1=a+bi$，$z_2=b-ai$（a，b は実数）となるような a と b の組 $(a,\ b)$ は 5 である。また，$(a,\ b)$ がこの組であるとき，△POQ の内接円の中心を表す複素数は 6 となる。ここで，i は虚数単位である。

5 の選択肢

(1) $(a,\ b)=(\sqrt{2},\ 1)$　　(2) $(a,\ b)=(\sqrt{3},\ 1)$

(3) $(a,\ b)=(\sqrt{2},\ 2)$　　(4) $(a,\ b)=(\sqrt{3},\ 2)$

(5) $(a,\ b)=(2,\ 1)$

6 の選択肢

(1) $\dfrac{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}+\dfrac{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}i$

(2) $\dfrac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}i$

(3) $\dfrac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}i$

(4) $\dfrac{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}i$

(5) $\dfrac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}i$

IV 整数 n に対する不定方程式 $5x+7y=n$ の整数解の組 $(x,\ y)$ を考える。$n=141$ のとき，$x>0$ かつ $y>0$ となる整数解の組は全部で $\boxed{\ 7\ }$ 組ある。また $x>0$ かつ $y<0$ かつ $x-y\leqq 48$ となる整数解の組がちょうど 3 組になる n のうち最大のものは $\boxed{\ 8\ }\boxed{\ 9\ }\boxed{\ 10\ }$ である。

V $\angle\mathrm{A}=\dfrac{5}{9}\pi$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{5}{18}\pi$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{1}{6}\pi$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AC 上に $\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{6}\pi$ となる点 D をとる。また，点 A から辺 BC 上に垂線を下ろし，辺 BC との交点を H とし，直線 AH と直線 BD の交点を E とする。

$$\frac{\tan\dfrac{5}{18}\pi\tan\dfrac{7}{18}\pi}{\tan\dfrac{1}{3}\pi\tan\dfrac{4}{9}\pi}=\frac{\boxed{\ 11\ }}{\boxed{\ 12\ }}$$

となるため，$\angle\mathrm{CEH}=\dfrac{\boxed{\ 13\ }}{\boxed{\ 14\ }}\pi$ である。（分数はそれ以上約分できない形で解答すること。）

VI ある科目の授業が週に 1 回あり，2 人の学生がその授業を受けることになっている。どちらの学生も，独立に 0.8 の確率で授業に出席するものとする。ただし，授業の出席人数が 0 人になったときは，どちらの学生も次の週の授業には独立に 0.9 の確率で出席するものとする。第 1 回目の授業に出席する確率はどちらも 0.8 である。第 n 回目の授業の出席人数が 0 人である確率を a_n とする $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$。このとき，a_2 の値は

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{\ 15\ } & \boxed{\ 16\ } & \\ \hline \boxed{\ 17\ } & \boxed{\ 18\ } & \boxed{\ 19\ } & \boxed{\ 20\ } \end{array}$$

である。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値は

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{\ 21\ } & \\ \hline \boxed{\ 22\ } & \boxed{\ 23\ } & \boxed{\ 24\ } \end{array}$$

である。（分数はそれ以上約分できない形で解答すること。）

VII 座標平面上に点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。原点を O とし，0 より大きい整数 n に対して点 P_k の座標を $\left(0,\ \dfrac{k}{n}\right)$ とする $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{AOP}_k$ の外接円の面積を b_k としたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n}$ はいくらか。

(2) (i) 実数 x について，$\sqrt{x^2+1}+x=t$ とおいたとき，$\sqrt{x^2+1}$ を t で表せ。

(ii) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{AOP}_k$ の内接円の半径を c_k としたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{n}$ はいくらか。